

建议 六年级 学生使用

12级

小学奥数

优秀生 培养教程 12级

学而思研发中心　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

小学奥数优秀生培养教程 . 十二级 / 学而思研发中心编著 . — 北京：电子工业出版社，2015.9
ISBN 978-7-121-26608-9

Ⅰ . ①小… Ⅱ . ①学… Ⅲ . ①小学数学课－教学参考资料 Ⅳ . ① G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 158648 号

策划编辑：蔡 葵
责任编辑：毕军志 文字编辑：张 萌
印 刷：
装 订：
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036
开 本：787×1 092 1/16 印张：6.75 字数：211.2 千字 插页：12
版 次：2015 年 9 月第 1 版
印 次：2015 年 9 月第 1 次印刷
定 价：54.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

学而思图书编委会

名誉顾问 裘宗沪

主　　编 余其煌　周春荔　陶晓永　张邦新

副 主 编 白　超　李　晋　孙　凯　杨　巍　周　斌　郭　巍
卢　宁　杨付光　赵璞铮　陈体銮　刘　威　许　威
张宇鹏　车　杰　刘　开　王　帅　张明颂　白云峰
林　达　王　磊　张　杰　白柯荣　李　响　王朝立
张超月　朱书将

执行主编 王朝立　张　江　郭忠秀　震　荣

编　　者 郭忠秀　赵永明　马　宁　李　杰　张　慧　贾豪杰
郑安山　震　荣　赵志永　桓　瑞　齐志远　栾学超
孙佳宝　周　耀　李明月　付　桂　李艳艳　贺赓帆
张诗梦　汪　开　段慧超　孙凤玉

编委会成员



裘宗沪

原中国数学奥林匹克委员会常务副主席

自1985年起，组织我国中学生参加国际数学奥林匹克竞赛，成绩斐然。1993年因对中国数学课外教育所做出的杰出贡献，被国家数学竞赛世界联盟授予Erdos奖。



余其煌

中国科学院数学与系统科学研究院应用数学研究所研究员。中国科学院应用数学研究所研究员，博士生导师。华罗庚金杯少年数学邀请赛主试委员会副主任委员。



周春荔

中国数学会会员、中国数学奥林匹克首批高级教练员。首都师范大学数学系教授，《数学教育学报》编委。现任华罗庚金杯少年数学邀请赛主试委员会副主任。



陶晓永

北京教育学院数学系副教授、中国数学奥林匹克高级教练、华罗庚金杯少年数学邀请赛主试委员会委员，北京数学竞赛集训队教练组组长。



杨巍

中国科学院博士，本科毕业于北京大学，曾获浙江省初中数学竞赛第一名，全国初中数学奥林匹克特等奖，高中数学联赛二等奖，高中物理联赛一等奖。



林达

北京大学数学科学学院本科毕业，学而思培优西安分校校长。初二即获得全国数学联赛一等奖，两获全国高中数学联赛一等奖。其学生在初二即获得全国高中联赛一等奖，创造全国纪录。



张杰

毕业于北京大学，现任学而思培优济南分校校长。曾获全国高中生物联赛一等奖、数学联赛二等奖、化学联赛二等奖。



卢宁

北京大学法学、经济学双学士，现任学而思培优青岛分校校长，熟悉3~9年级课外数学。



张诗梦

北京大学元培学院本科毕业，获得理学学士学位和经济学学士双学位。曾获第8届小学华杯赛总决赛银牌。

前　言

本套丛书具有以下特色：

1.权威团队

丛书汇集了众多专家及学而思全国数千名一线教师的智慧，知识体系具有系统性、条理性，在解题方法方面注重一题多解、多题一解、变通分析、总结规律，帮助学生跳出题海，举一反三，触类旁通。

2.视频讲解

本套丛书力邀一线名师，对书中经典例题进行网络视频讲解（免费）。学生登录网址：zt.xueersi.com/aoshuyx即可观看。

3.论坛互动

读者只需登录http://book.eduu.com/peiyou，单击《小学奥数优秀生培养教程12级》“新书答疑”按钮，即可实现与老师在线互动，与同学交流心得体会，分享学习经验，关注微信公众平台，及时了解我们的动态信息，精彩不断，敬请期待。

4.QQ答疑

学生在使用本书过程中，会遇到一些学习问题，这里有一线老师在线为学生答疑解惑，学生只要登录好未来书籍服务群QQ：324414614，即可实现与名师在线一对一的交流。

在本书的编写过程中，我们征求了全国学而思培优19所分校教研部的老师的意见。肖京园、刘盛；陈绍伦、石琦、林诗宇；吴中亚；戴雪珂、汪润庆、宋青平；鲍泽瀚、司慧杰；盛攀、贾豪杰、张斌斌；尹斌、华潮；朱贤挺；王环宇；周广杰、刘方超；王银川；马宽宇；申燕姿；张文婷；靳宏亮；石秋旭；谌鑫；朱胜辉；陆朝胜、周耀、杨婕、曹威、程雪、荆晨玮等老师和平面设计师杨帆、常冰玉、胡安萍、温溪、韩东坡，插画师贾烨、马昀为对本书做出了重大贡献。

我们虽秉承着“打造精品书籍，让学生高效学习”的精神编写此书，但不妥之处在所难免，读者在使用本书过程中发现任何问题或者提出改善性意见，均可与我们联系。

联系方式：xiaoxueshuji@100tal.com

学而思研发中心

十二级体系介绍

好未来国际教育集团旗下品牌学而思培优历经7年沉淀，于2010年推出行业领先的小学奥数十二级体系，将原来支离破碎的小学奥数课程重新整合，让广大优秀的小学生享受最专业的小学数学教育。其间，经过无数家长和学生的反馈，十二级体系在2012年进行了一次全方位的升级，使得如今能更好地呈现在更多的家长和学生面前，同时也向世人展示着学而思培优不断创新、孜孜不倦的研发精神。

每一级课程会学习哪些内容呢？结合专家的建议和数学能力培养的需要，学而思课程体系把整个小学阶段需要掌握的内容分成了八大问题：计算问题、整数问题、图形问题、应用问题、行程问题、组合问题、计数问题和综合问题。

应广大学生、家长要求，学而思教研中心将十二级体系再次整理，出版了《小学奥数优秀生培养教程》（以下简称《教程》）。《教程》共分为12本，每本对应1级，总共12级，组成**学而思培优小学奥数十二级体系**。

教程1级	教程2级	建议一年级学生学习
教程3级	教程4级	建议二年级学生学习
教程5级	教程6级	建议三年级学生学习
教程7级	教程8级	建议四年级学生学习
教程9级	教程10级	建议五年级学生学习
教程11级	教程12级（本册书）	建议六年级学生学习

每一大问题都有其相对应的颜色，如下所示：

计算问题	包括数的运算和技巧、解方程、数列数表等内容。
整数问题	包括对整数问题的研究，如整除、质数、合数等内容。
图形问题	包括平面图形和立体图形的相关内容。
应用问题	包括和差倍、鸡兔同笼、盈亏问题、分数比例应用题等内容。
行程问题	包括与速度、路程、时间相关的所有内容。
组合问题	包括组合原理、组合构造、逻辑推理、数字谜等内容。
计数问题	包括枚举法、数图形、加乘原理、排列组合等内容。
综合问题	包括上述七大问题中任意至少两个问题的综合性内容。

这样使读者在看到每一讲的主题颜色的时候就可以很轻松地知道本讲属于哪一问题了。**下面一个图表可以很清楚地看到八大问题在本册书的分布。**



出场人物



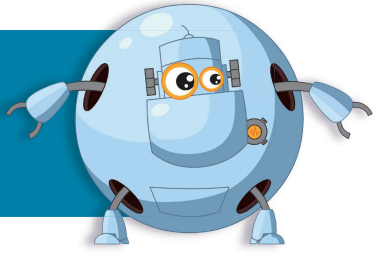
艾迪： X别动队成员，正义勇敢的星球战士。5岁的时候，遭遇了巨大灾难——陨石风暴，为守护地球，艾迪的父亲牺牲了。查尔斯博士消除了艾迪的所有记忆，并让艾迪与自己一起生活。



薇儿： X别动队成员。父亲是宇宙能源大王，所以薇儿从小就像小公主一样地成长。薇儿自幼喜欢挑战冒险。薇儿瞒着自己的父亲来到基地，同艾迪他们一起组建了X别动队。



查尔斯博士： 德高望重的科学家，是X别动队行动的策划者。在一次执行任务的过程中，博士失去了手臂，随后自己研制了一副机械手臂。



大宽： X别动队成员，力大无穷的机器人，曾经的拆弹专家。在X别动队成立之前大宽一直都承担着保卫家园的任务，负责拆解各种炸弹。



加加：
陪伴薇儿成长的加法国守护精灵。



乘乘：
乘法国守护精灵。



减减：
艾迪在奇遇冒险中遇到的减法国守护精灵。



除除：
来自除法国的小毛毛虫。

目　录

第 1 讲　数形结合……1

第 2 讲　圆柱与圆锥……8

第 3 讲　复合图形分拆……14

第 4 讲　经济问题……24

第 5 讲　数论中的规律……31

第 6 讲　旋转与轨迹……36

第 7 讲　算两次……45

第 8 讲　从极端考虑……52

第 9 讲　数字谜中的计数……59

第 10 讲　工程问题进阶……66

第 11 讲　变速问题……73

目　录

第 12 讲　进位制进阶……79

第 13 讲　应用题综合……87

第 14 讲　抽屉原理进阶……93

答案与提示……99

第 1 讲

数形结合

前铺知识　整数与数列 ▶▶ 勾股定理 ▶▶

本讲内容

1．计算中的数形结合。

2．用图形表示数。

3．其他数形结合问题。

本讲故事

在暑假的故事中，神秘的黑衣人骗走了神灯，黑衣人是谁？城堡又会遇到什么灾难呢？



1.1 计算中的数形结合

例 1 （1）试用图解法说明：$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

分析

根据图 1-1 算出第 1 行的和，第 2 行的和，……，第 n 行的和，再用总和除以 2。

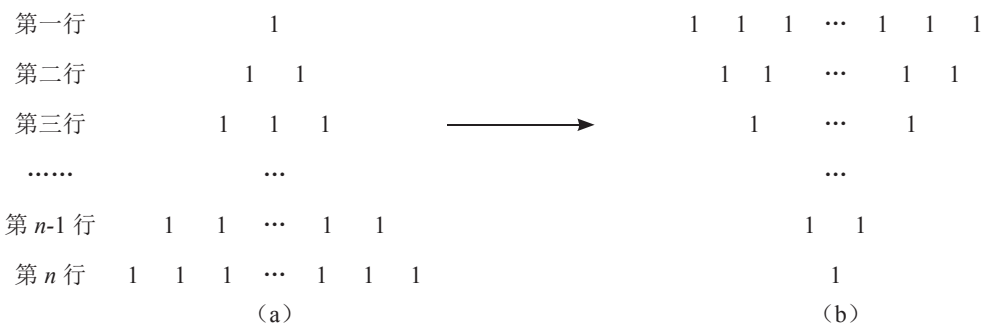


图 1-1

（2）试用图解法说明：$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

分析

按图 1-2 所示线路求和，同时等于正方形的面积。

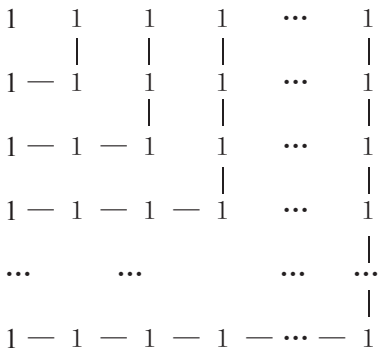


图 1-2

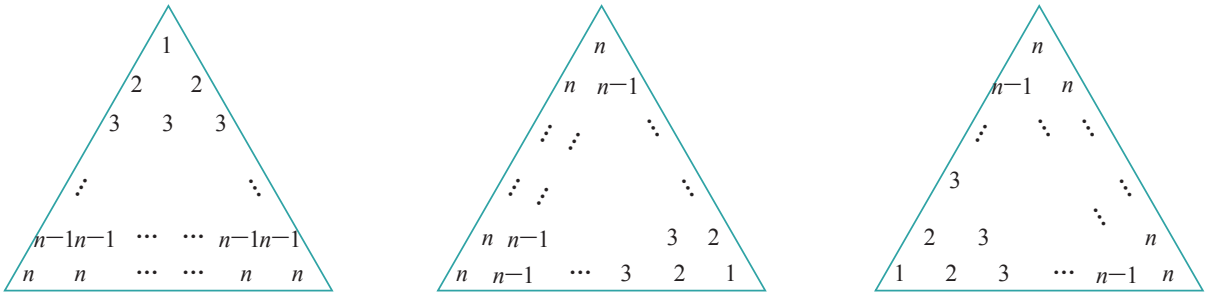
例 2 如图 1-3 所示，有三张相同的三角形表格，每张图表上均有 1 个 1，2 个 2，3 个 3，……，$n-1$ 个 $n-1$，n 个 n；显然，每张图表上的数总和为 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$。请回答以下问题：

（1）每张图表上有_____个数。

（2）三张图表相同位置处的三个数之和总是 _____。

（3）三张图表上的数总和为 _____。

（4）综上可得：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=$_____。



（a）　　（b）　　（c）

图 1-3

分析

（1）由图 1-3（a）可得第一行有 1 个数，第二行有 2 个数，第三行有 3 个数，……，第 n 行有 n 个数。所以把所有行的个数加起来即可。（2）三张图表相同位置处的三个数之和是一个固定的数。（3）三张图表的第一行的和是 1 个 $2n+1$，第二行是 2 个 $2n+1$，第三行是 3 个 $2n+1$，……，第 n 行是 n 个 $2n+1$。所以要求三张图表上数的总和，只要把每一行数的和加起来即可。（4）用题（3）的结果除以 3。

例 3 根据图 1-4（a），第一行数的和为 1+2+3+4；

根据图 1-4（b），左上角的 $1=1^3$。

第二组被连线的数的和分别为：

$(1+2+3+4)\times$_____；

$2+4+2=(1+2+1)\times 2=(____)^3$。

第三组被连线的数的和分别为：

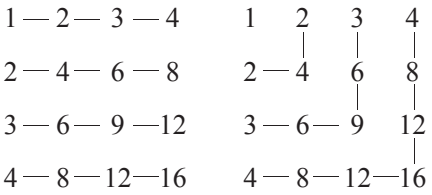
$(1+2+3+4)\times$_____；

$3+6+9+6+3=(1+2+3+2+1)\times 3=(____)^3$。

第四组被连线的数的和分别为：

$(1+2+3+4)\times$_____；

$4+8+12+16+12+8+4=(____)^3$。



（a）　　（b）

图 1-4

综上可知，图 1-4（a）中所有数的和为 (_____)^2；

图 1-4（b）中所有数的和为：1^3+(　)^3+(　)^3+(　)^3。
可以推断 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$=_____。

分析

观察第 2 行、第 3 行和第 4 行，提取公因数 2,3,4 即可。

练习 1

计算：$2^2+4^2+6^2+\cdots+20^2$

练习 2

计算：$1^2+3^2+5^2+\cdots+19^2$

1.2　用图形表示数

例 4

（1）平方差公式的探索：
如图 1-5 所示，大正方形的边长为 a，小正方形的边长为 b。
若用减法表示阴影部分的面积为_____；
若将阴影部分分割成两个长方形，再拼成一个大长方形，
则大长方形的长和宽分别为_____和_____。

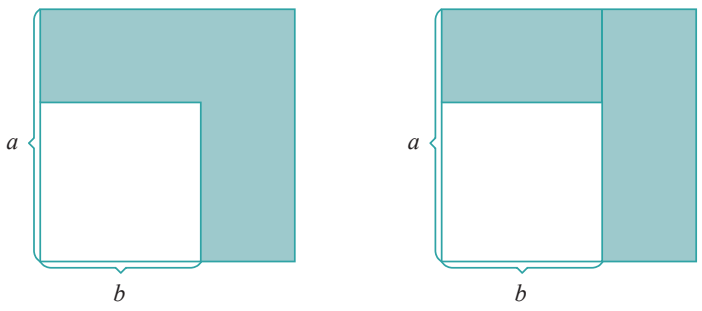


图 1-5

那么 a^2-b^2=_____。

（2）完全平方和公式的探索：
如图 1-6 所示的大正方形边长为 $a+b$，则其面积为 $(a+b)^2$。
图中①、②、③、④的面积分别为_____、_____、_____和_____。
那么 $(a+b)^2$=_____。

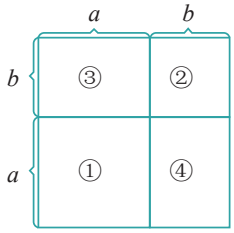


图 1-6

（3）观察图 1-7 所示的大长方形，完成式子：
$(a+b)(c+d)$=_____。
请你再想一想：$(a+b+c)(x+y+z)$=_____。

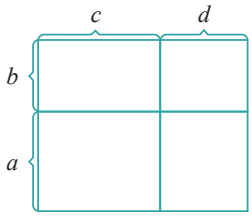


图 1-7

分析

（1）用减法表示阴影面积为 a^2-b^2；若将阴影分割再拼接成长方形，其长为 $a+b$，宽为 $a-b$。
（2）①、②、③、④的面积分别为 a^2,b^2,ab,ab。总之，a^2 可联想到的是正方形面积，ab 可联想到的是长方形面积。
（3）大长方形被分成四块小长方形，大长方形面积等于四块小长方形的面积和。

练习 3

计算：$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+2005^2-2006^2+2007^2$

1.3 其他数形结合问题

例 5 （1）小明用 48 元钱按零售价买了若干练习本。如果按批发价购买，每本便宜 2 元，恰好多买 4 本。请问：零售价每本多少元？

分析

如图 1-8 所示，以横线表示本数，纵线表示单价，因为长方形 A 的面积（表示零售价便宜 2 元对应的总钱数）与长方形 B 的面积（表示多买 4 本对应的总钱数）相等，所以长方形 A 的长是长方形 B 的宽的 2 倍，设批发价为 x 元（图中长方形 B 的高），因此按批发价买了 $(2x+4)$ 本，则有 $x(2x+4)=48$。

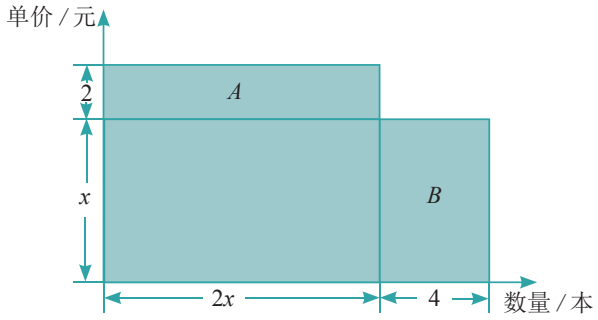


图 1-8

（2）甲、乙两人从 A,B 两地同时出发，相向而行，按预定速度他们将在下午 5 时在途中相遇；如果他们每人每小时都比预定速度快 1 千米，则可在下午 4 时相遇；如果他们每人每小时都比预定速度慢 1.5 千米，则要在下午 7 时相遇，A,B 两地的距离是_____千米。

分析

如图 1-9 所示的三个长方形面积相同。

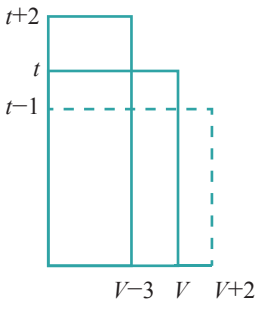


图 1-9

开放试题

一个正在行进的 8 人队列，每人身高各不相同，按从低到高的次序排列。现在他们要变成并列的两列纵队，每列仍然是按从低到高的次序排列，同时要求并排的每两人中左边的人要比右边的人矮，那么，两列纵队有_____种不同排法。

笔记整理

一些重要的公式：

①$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

②$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

③$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

④$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$

⑤$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

⑥$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

⑦$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

本讲巩固

1 计算下列各式的项数及和：

（1）1+3+5+7+…+99；

（2） 1+10+19+…+217

2 计算：1×99+2×97+3×95+…+50×1

3 计算：

（1）$6^2+7^2+8^2+\cdots+30^2$

（2）$10^3+11^3+12^3+\cdots+100^3$

4 有两组数：*A* 组为 6,9,15,20， *B* 组为 32,43,25。从每一组数中选一个数再相乘会得到多少个积？所有的积的和是多少？

5 全班同学去划船，如果减少一条船，每条船正好坐 9 人，如果增加一条船，每条船正好坐 6 人。问全班有多少人？

第 2 讲

圆柱与圆锥

前铺知识　切片与染色 ▶▶ 立体图形与空间想象 ▶▶

本讲内容

1. 圆柱基本公式。
2. 圆锥基本公式。
3. 圆柱与圆锥综合。

本讲故事

艾迪发现了黑暗魔法师的巢穴，即将与敌人展开一场大战……





马格里布是非洲西北部一地区，阿拉伯语意为“日落之地”。宋代《诸蕃志》译为“默伽猎”。 该地区传统上受地中海和阿拉伯文明影响，同时也与撒哈拉沙漠以南的黑非洲地区有着密切的贸易往来，因此形成了独特的文化。传说黑暗魔法师贾万就来自这里，但说法不一，也有说他来自中国。

2.1 圆柱基本公式

例 1 （1）一本纪念册的书页是圆形的，每一页的面积为 460 平方厘米，高 3 厘米，求这本纪念册的体积（每一页书页的形状完全相同）。

（2）如果圆柱的半径为 r，高为 h，你能猜想圆柱的体积公式吗？再结合图 2-1，证明你的猜想。

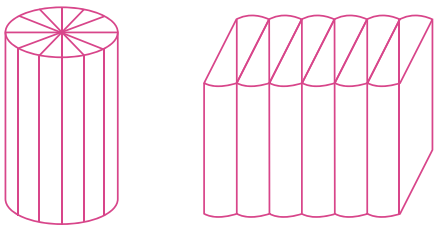


图 2-1

分析

（1）直接套用公式 $V=S_{底}h$。

（2）猜想：$V=S_{底}h=\pi r^2h$ 。图 2-1（a）被切割得越细致，图 2-1（b）就越接近长方体。圆柱底面周长的一半相当于长方体的长，底面半径相当于长方体的宽，圆柱与长方体的高对应，因此两个几何体体积相同。

例 2 （1）已知一个圆柱底面直径为 10 厘米，高为 8 厘米，求圆柱的表面积和体积？

（2）已知一个圆柱侧面积为 628 平方厘米，高为 10 厘米，求圆柱表面积和体积？

（3）已知一个圆柱的高增加了 3 分米，体积增加了 84.78 立方分米，求表面积增加了多少？（$\pi=3.14$）

（4）已知一个圆柱的高减少了 2 厘米，侧面积减少了 50.24 平方厘米，它的体积减少了多少立方厘米？

分析

直接套用公式。

例 3 如图 2-2 所示，用高都是 1 米，底面半径分别为 1.5 米、1 米和 0.5 米的 3 个圆柱组成一个物体。问这个物体的表面积是多少平方米？（π 取 3.14）

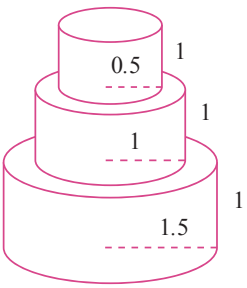


图 2-2

分析

从上面俯视看到的图形如图 2-3 所示，表面积等于两个底面积加上三个圆柱的侧面积。

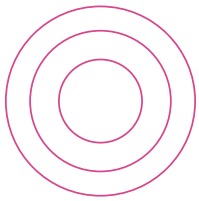


图 2-3

2.2 圆锥基本公式

例 4 （1）根据圆柱体体积的结论，猜想圆锥体体积和圆锥的什么数据有关？

（2）大宽想知道圆锥的体积公式，于是使用了实验法。他找了一个圆柱形的模具，又找了一个圆锥形的模具（如图 2-4 所示），这两个模具的底面一样大，也一样高。他向圆锥形模具中倒满水，然后再将水倒进圆柱形模具，发现三次正好将圆柱形模型倒满。结合实验现象，猜想圆锥的体积公式。

（3）大宽测量出这两个模具高都是 10 厘米，底面直径都是 8 厘米，那么这两个模具一次最多能各装多少水？（π 取 3.14）

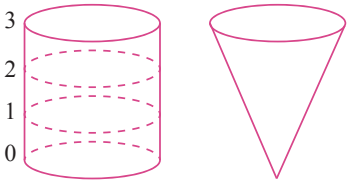


图 2-4

分析

直接套用公式。

练习 1

（1）计算图 2-5 中所示的各圆锥体积。（单位：厘米）（π 取 3.14）

（2）沙漏是我国古代的一种计时工具。现有一个沙漏，上下两部分的形状都是半径 4 分米，高 9 分米的圆锥。现在上半部分沙漏已经装满了沙子，如果每小时流出 8 升沙子，那么沙漏里的沙子全部流到下半部分需要多少小时？（π 取 3.14）

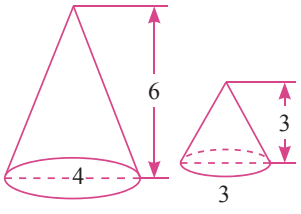


图 2-5

2.3 圆柱与圆锥综合

例 5 （1）有 A,B 两个容器，如图 2-6 所示，先将 A 容器注满水，然后全部倒入 B 容器，求 B 容器的水深。（单位：厘米）

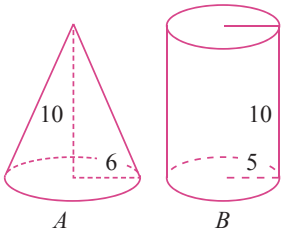


图 2-6

分析

水的体积不变，用水的体积除以圆柱的底面积是高。

（2）如图 2-7 所示，一个酒瓶深 30 厘米，底面内直径是 10 厘米，瓶里酒深 15 厘米。把酒瓶塞紧后使其瓶口向下倒立，这时酒深 25 厘米。酒瓶的容积是多少？（π 取 3）

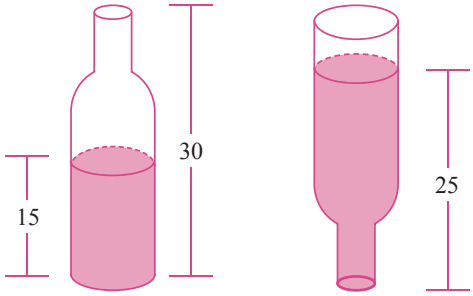


图 2-7

分析

观察倒立前后，酒瓶中酒的总量没变，即瓶中液体体积不变。

当酒瓶倒过来时酒深 25 厘米，因为酒瓶深 30 厘米，这样所剩空间为高 5 厘米的圆柱，再加上原来 15 厘米高的酒的体积即为酒瓶的容积。

练习2

有一个瓶子，瓶底直径是 10 厘米，瓶中装一定量的液体，正着放和倒着放如图 2-8 所示。请问：

（1）瓶子瓶颈的高是多少厘米？

（2）瓶子的体积是多少？

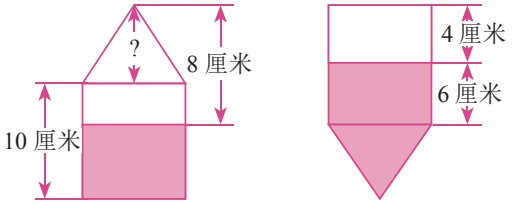
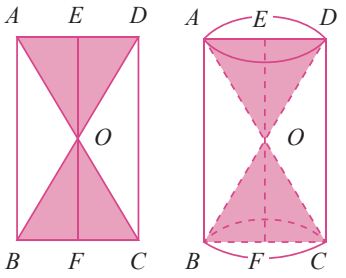


图 2-8

开放试题

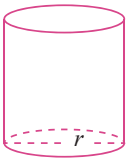
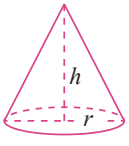
如图 2-9（a）所示，*ABCD* 是长方形，*BC* 宽 6 厘米，*AB* 长 10 厘米，对角线 *AC*,*BD* 相交于点 *O*。点 *E*,*F* 分别是 *AD* 与 *BC* 的中点，图中的阴影部分以 *EF* 为轴旋转一周，则白色部分扫出的立体图形（如图 2-9（b）所示）的体积是多少立方厘米？（π取 3）



（a）　　（b）

图 2-9

笔记整理

立体图形	表面积	体积
	$S_{圆柱}$ = 侧面积 +2 个底面积 $=2\pi rh+2\pi r^2$	$V_{圆柱}=\pi r^2h$
	$S_{圆锥}$ = 侧面积 + 底面积 $=\frac{n}{360}\pi l^2+\pi r^2$ 注：l 是母线，即连接顶点与底面圆上任意一点的线段。 （理解即可，不需要掌握）	$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h$

本讲巩固

1 如图 2-10 所示，一个圆柱体的体积是 50.24 立方厘米，底面半径是 2 厘米。将它的底面平均分成若干个扇形后，再截开拼成一个和它等底等高的长方体，表面积增加了多少平方厘米？（π 取 3.14）

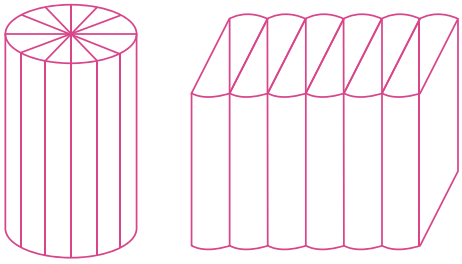


图 2-10

2 有一个圆柱体零件，高 10 厘米，底面直径是 6 厘米，零件的一端有一个圆柱形的圆孔，圆孔的直径是 4 厘米，孔深 5 厘米（如图 2-11 所示）。如果将这个零件接触空气的部分涂上防锈漆，那么一共要涂多少平方厘米？（π 取 3.14）

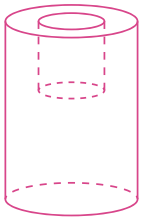


图 2-11

3 把一个高 10 厘米的圆柱体沿水平方向锯掉 4 厘米后，剩下的圆柱体表面积比原来的圆柱体表面积减少了 12.56 平方厘米。原来的圆柱体体积是多少立方厘米？（π 取 3.14）

4 这里有一个圆柱和一个圆锥（如图 2-12 所示），它们的高和底面直径都标在图上，单位是厘米。请问：圆锥体积与圆柱体积的比是多少？

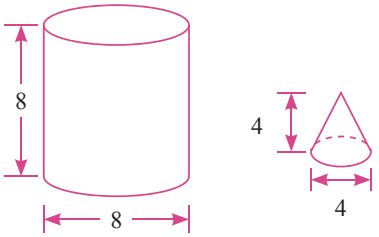


图 2-12

5 如图 2-13（a）所示，一个盖着瓶盖的瓶子，里面装着一些水，瓶底面积为 10 平方厘米，如果把瓶子倒过来，水位线则如图 2-13（b）所示。请你根据图中标明的数据，计算瓶子的容积。

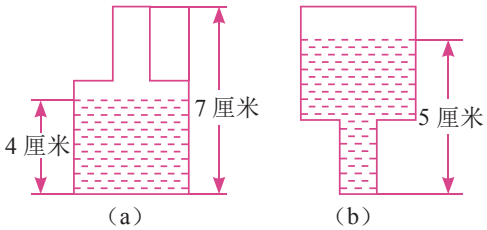


图 2-13

第3讲

复合图形分拆

前铺知识　燕尾模型 ▶▶ 特殊图形 ▶▶

本讲内容

1．辅助线的技巧。

2．常见几何面积模型复习。

3．复合图形分拆方法。

本讲故事

打败了黑暗魔法师，救出了公主，接下来X别动队还会迎来什么样的挑战呢?



《哈利·波特》是英国作家J.K.罗琳的魔幻文学系列小说，前六部描写的是主人公哈利·波特在魔法学校的学习生活和冒险故事。第七部描写的是哈利·波特在校外寻找魂器并消灭伏地魔的故事。伏地魔本名叫汤姆·里德尔。

智趣试题

警方的追捕

三个城镇由三条主干道连接起来构成一个锐角三角形，它们的治安状况由同一个警察局负责管理。

（1）要使警察局到三个城镇的距离之和最短，应建在何处？

（2）若某镇出现案件，警察必须出动去追捕歹徒，那么警察局应建在何处才能使它到三个小镇的路程相等？

（3）如果歹徒侥幸逃脱了第一次追捕，那么第二辆警车应该停在什么地方待命才能使它到三条公路的距离相等？

3.1 辅助线的技巧

例 1 （1）如图 3-1 所示，直角三角形 ABC 中，$\angle B$ 是直角，$AB=3$，$BC=4$。在三角形内有一点 P，点 P 到三边的距离都相等，请求出这个距离的值。

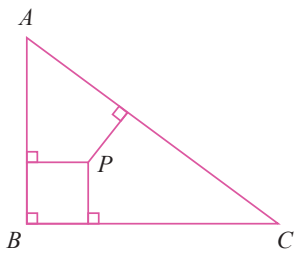


图 3-1

分析

如图 3-2 所示，首先根据勾股定理可知 $AC=5$，连接 PA,PB,PC，则可知这三个三角形若分别以 AB,BC,CA 为底，其高都相等，这个高的长度即为所求距离的值。可以列方程。

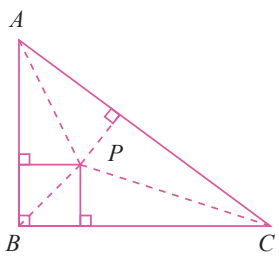


图 3-2

（2）如图 3-3 所示，四边形 $ABCD$ 内有一点 O，点 O 到四条边的垂线长都是 8 厘米，四边形的周长是 32 厘米。四边形的面积是多少平方厘米？

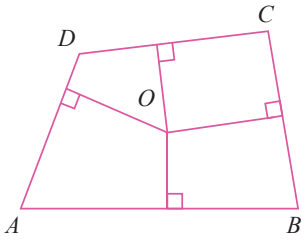


图 3-3

分析

同题（1）分析，如图 3-4 连接 OA,OB,OC,OD，四边形面积直接用周长乘以高除以 2。

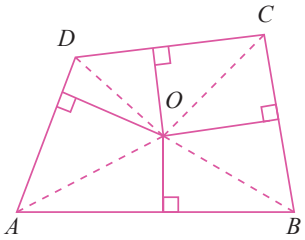


图 3-4

练习 1

在△ ABC 内有一点 O，且点 O 到三角形三边距离相等，已知三角形的面积为 30，周长是 15，请问点 O 到△ ABC 三边的距离是多少？

例 2

将边长为 a 的正方形各边的中点连接成第二个正方形，再将第二个正方形各边的中点连接成第三个正方形，依此规律，继续下去，得到图 3-5。则边长为 a 的正方形面积是图中阴影部分面积的_____倍。

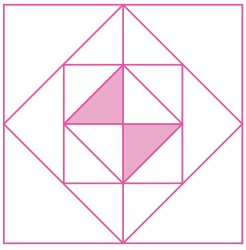


图 3-5

分析

把正方形分割成最小的三角形。

练习2

如图 3-6 所示，长方形 *ABCD* 的面积是 40 平方厘米，*E,F,G,H* 分别为 *AD,AH,DH,BC* 的中点。请问：三角形 *EFG* 的面积是多少平方厘米？

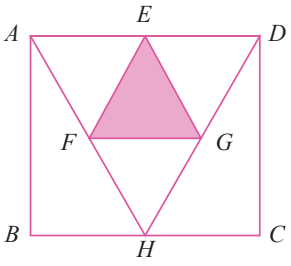


图 3-6

3.2 常见几何面积模型复习

例 3 （1）如图 3-7 所示，正方形 *ABCD* 的边长为 6，*AE*=1.5，*CF*=2。过 *D* 点的长方形 *EFGH* 的面积为 _____。

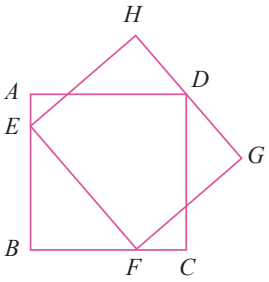


图 3-7

分析

如图 3-8 所示，连接 *DE*, *DF*，则长方形 *EFGH* 的面积是三角形 *DEF* 面积的 2 倍。

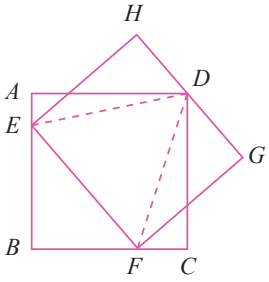


图 3-8

（2）如图 3-9 所示，已知四边形 $ABCD$ 中，E,F 分别是 AD,BC 的中点，连接 DF,BE。四边形 $BEDF$ 的面积为 6，则四边形 $ABCD$ 的面积为_____。

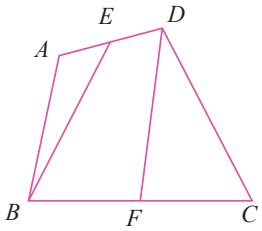


图 3-9

分析

如图 3-10 所示，连接 BD，因为点 E,F 是中点，所以有 $S_{\triangle AEB}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}$，$S_{\triangle CDF}=\frac{1}{2}S_{\triangle CDB}$，

$S_{\triangle ABE}+S_{\triangle CDF}=\frac{1}{2}S_{四边形\,ABCD}$。

由此可得，$S_{\triangle BED}+S_{\triangle DBF}=\frac{1}{2}S_{四边形\,ABCD}$。

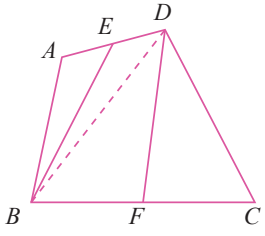


图 3-10

（3）如图 3-11 所示，面积为 12 平方厘米的正方形 $ABCD$ 中，E,F 是 DC 边上的三等分点，请问：阴影部分的面积是多少平方厘米？

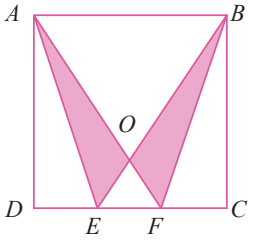


图 3-11

分析

因为 E,F 是 DC 边上的三等分点，所以 $EF:AB=1:3$，设 $S_{\triangle OEF}=1$（份），根据梯形蝴蝶定理可以知道 $S_{\triangle AOE}=S_{\triangle OFB}=3$（份），$S_{\triangle AOB}=9$（份），$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle BCF}=(1+3)$ 份，因此正方形的面积为 $4+4+(1+3)^2=24$（份），$S_{阴影}=6$（份），$S_{阴影}:S_{正方形}=6:24=1:4$。

练习3

如图 3-12 所示，有一个长 6 厘米，宽 4 厘米的长方形 *ABCD*。在各边上取点 *E,F,G,H*, 在连接 *HF* 的线上取点 *P*，与点 *E* 和点 *G* 相连。当四边形 *AEPH* 的面积是 5 平方厘米时，求四边形 *PFCG* 的面积。

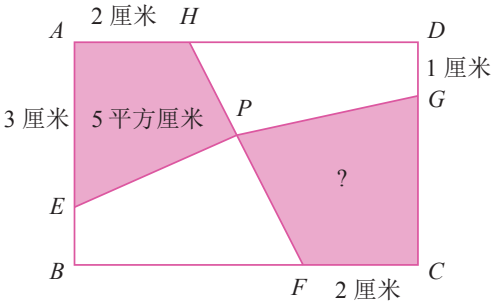


图 3-12

练习4

在图 3-13 所示的正方形 *ABCD* 中，*E* 是 *BC* 边的中点，*AE* 与 *BD* 相交于 *F* 点，三角形 *BEF* 的面积为 1 平方厘米，那么正方形 *ABCD* 面积是_____平方厘米。

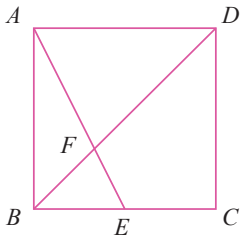


图 3-13

3.3 复合图形分拆方法

例 4 两个正方形如图 3-14 所示放置，图中的每个三角形都是等腰直角三角形；若其中较小正方形的边长为 12 厘米，那么较大正方形的面积是_____平方厘米。

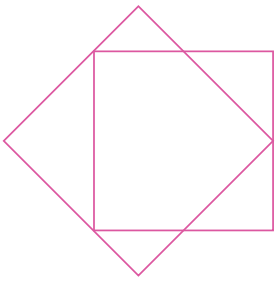


图 3-14

分析

根据题意，每个三角形都是等腰直角三角形，对其分割如图 3-15 所示。

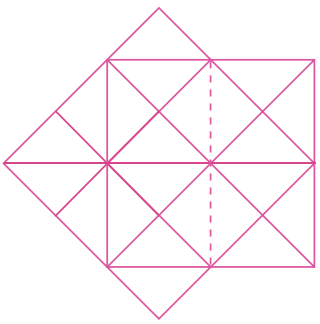


图 3-15

例 5 如图 3-16 所示，三角形 ABC 中，延长 BA 到 D，使 $DA=AB$，延长 CA 到 E，使 $EA=2AC$，延长 CB 到 F，使 $FB=3BC$。如果三角形 ABC 的面积是 1，那么三角形 DEF 的面积是_____。

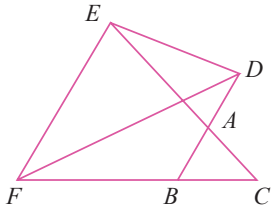


图 3-16

分析

$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle AED}+S_{四边形 ABFE}-S_{\triangle BDF}$，根据鸟头模型可得

$S_{\triangle AED}：S_{\triangle ABC}=(AE\times AD)：(AB\times AC)=(1\times 2)：(1\times 1)=2：1$

$S_{\triangle EFC}：S_{\triangle ABC}=(3\times 4)：(1\times 1)=12：1$

$S_{\triangle DBF}：S_{\triangle ABC}=(BF\times BD)：(BA\times BC)=(3\times 2)：(1\times 1)=6：1$

练习5

如图 3-17 所示的长方形 $ABCD$ 中，$AE=EF=FB=CG=GH=HD$，阴影部分的面积占长方形 $ABCD$ 面积的几分之几？

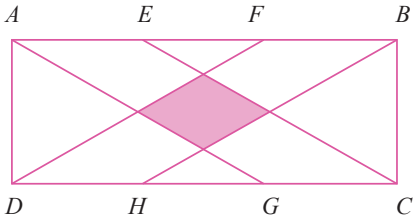


图 3-17

开放试题

你玩过七巧板吗？你能否利用七巧板拼出图 3-18 中所示的图形？

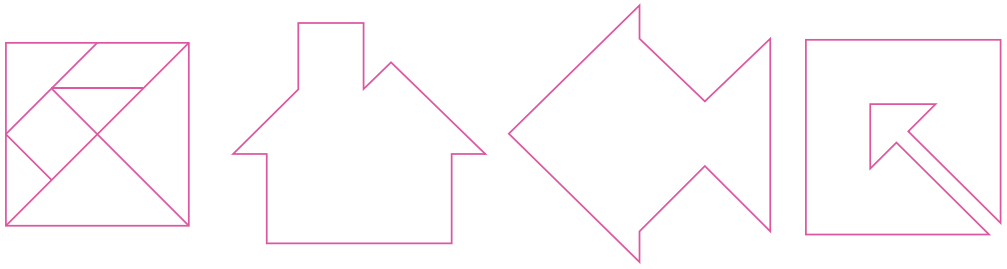


图 3-18

笔记整理

1. 一半模型（图 3–19、图 3–20）

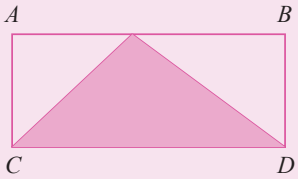


图 3-19

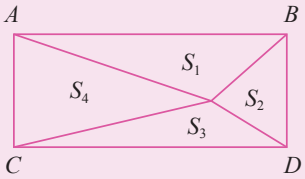


图 3-20

$S_{阴影}=\frac{1}{2}S_{长方形}$　　$S_1+S_3=S_2+S_4=\frac{1}{2}S_{长方形}$

2. 等高模型

（1）等底等高的两个三角形面积相等；

（2）两个三角形高（底）相等，面积比等于它们的底（高）之比；

（3）两个平行四边形高（底）相等，面积比等于它们的底（高）之比。

3. 梯形蝴蝶模型（图 3–21）

（1）$S_1:S_3=a^2:b^2$

（2）$S_1:S_3:S_2:S_4=a^2:b^2:ab:ab$；

（3）S 的对应份数为 $(a+b)^2$。

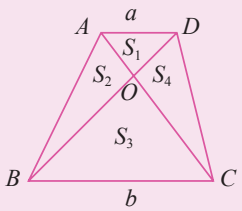


图 3-21

4. 鸟头模型（图 3–22）

（1）两个三角形中有一个角相等或互补，这两个三角形叫作共角三角形。

（2）共角三角形的面积比等于对应角（相等角或互补角）两夹边的乘积之比。

在图 3-22 所示的四个图中，$\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 均为共角三角形，图（a）、图（b）中

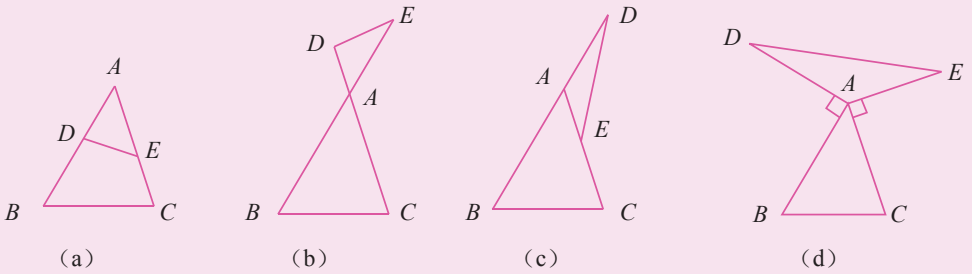


图 3-22

$\angle BAC=\angle DAE$，图（c）、图（d）中 $\angle BAC+\angle DAE=180°$，四图均有共同的结论：$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ADE}=(AE\times AC):(AB\times AC)$（已知四条边的边长时，可用这种

形式），或 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{AB}{AD}\times\frac{AC}{AE}$（已知对应边的比例时或已知四条边的边长时，均可用这种形式）。

5. 相似模型（图 3–23、图 3–24）

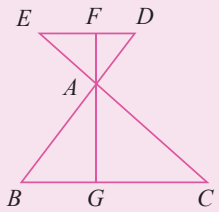


图 3-23

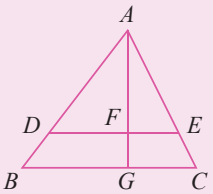


图 3-24

（1）$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}=\frac{AF}{AG}$；　　（2）$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=AF^2:AG^2$。

6. 燕尾模型

如图 3-25 所示，在三角形 ABC 中，AD,BE,CF 相交于同一点 O，那么 $S_{\triangle ABO}:S_{\triangle ACO}=BD:DC$。

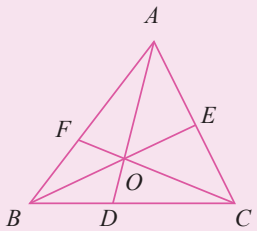


图 3-25

本讲巩固

1 如图 3-26 所示，P 是等边三角形 ABC 内一点，PD,PE,PF 分别为垂线段，且△ ABC 的周长为 6，面积为 a，求 $PD+PE+PF$ 的长度。

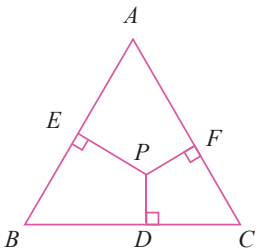


图 3-26

2 如图 3-27 所示，已知四边形的两条边的长度和三个角，那么这个四边形的面积是多少？

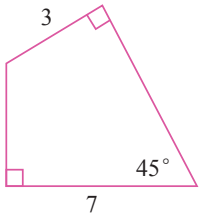


图 3-27

3 如图 3-28 所示，正方形 *ABCD* 和正方形 *ECGF* 并排放置，*BF* 和 *EC* 相交于点 *H*，已知 *AB*=4 厘米，则阴影部分的面积是 _____ 平方厘米。

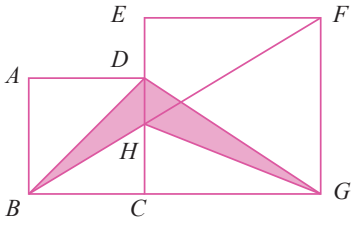


图 3-28

4 如图 3-29 所示，已知 △*DEF* 的面积为 7 平方厘米，*BE*=*CE*，*AD*=2*BD*，*CF*=3*AF*，求△*ABC* 的面积。

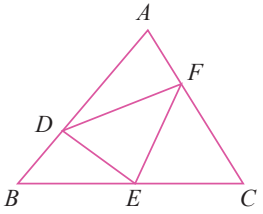


图 3-29

5 如图 3-30 所示，已知四边形 *ABCD* 中，*E*,*F* 分别是 *AD*,*BC* 的中点，连接 *AF*,*DF*,*BE*,*CE*。△*AFD* 面积为 2，△*BCE* 的面积为 5。则四边形 *ABCD* 的面积为_____。

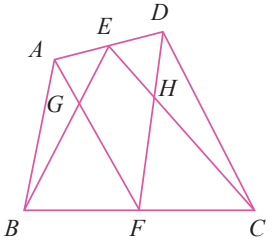


图 3-30

第4讲

经济问题

前铺知识　列方程解应用题 ▶▶ 比例应用题 ▶▶

本讲内容

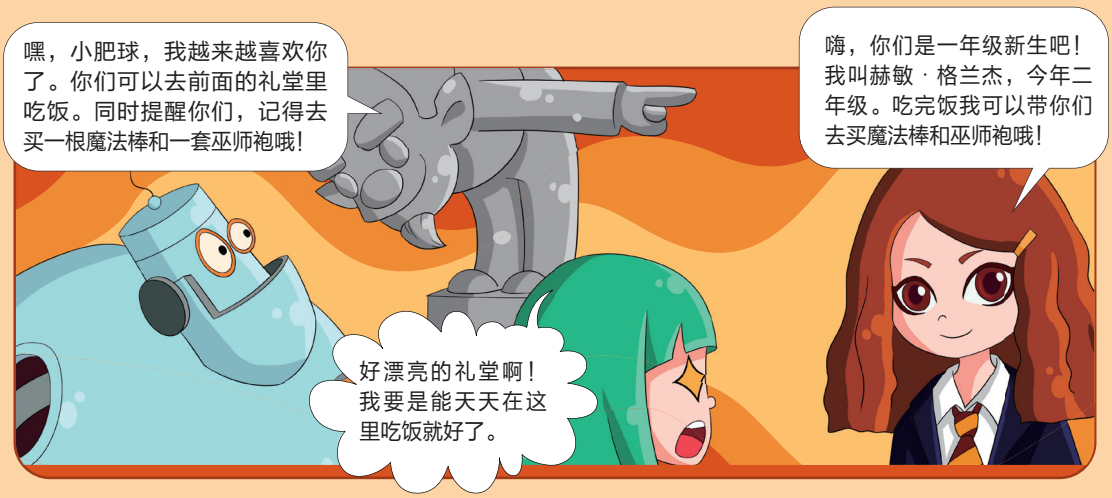
1．利息与纳税问题。

2．利润问题。

3．综合应用。

本讲故事

为了抓获越狱的宇宙罪犯，小勇士们被传送到了霍格沃茨的魔法世界里，在那里，他们会遇到什么样的精彩故事呢?



智趣试题

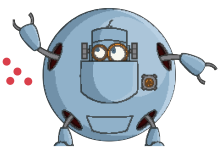
失踪的便士

史密斯太太和琼斯太太在市场上卖苹果。史密斯太太有事被人叫走时请琼斯太太替她卖掉剩下的苹果。
现在的情况是，她们俩的苹果个数一样多，不过琼斯太太的苹果大一些，价格是 1 便士两个，而史密斯太太的苹果卖 1 便士三个。琼斯太太在接受了替她朋友卖掉存货的任务之后，为了做到公平公正，她把所有的苹果混在一起，以五个苹果 2 便士的价格出售。第二天当史密斯太太来到市场上的时候，苹果都已经卖完了，但是当她们开始分配收入的时候却发现恰好少了 7 便士。你能说清楚她们分别损失了多少钱吗？



可以容易地求出，如果每个苹果分别卖$\frac{1}{3}$便士和$\frac{1}{2}$便士，平均就是两个苹果$\frac{5}{6}$便士，或平均一个苹果$\frac{5}{12}$便士。由于是以五个苹果 2 便士，也就是一个苹果$\frac{2}{5}$便士的价格售出的，所以每个苹果损失$\frac{1}{60}$便士。

已知一共损失了 7 便士，因此用 60 乘以 7 得到 420，这就是当初苹果的数量，两位太太各有一半。琼斯太太的 210 个苹果应该卖得 105 便士，但是因为她得到的是以五个苹果 2 便士的价格出售的收入 84 便士，损失了 105−84=21（便士），同理史密斯太太多赚了 14 便士。



4.1 利息与纳税问题

例 1 表 4-1 所示为某时期人民币存款基准利率表。

表 4-1

整存整取时间	三个月	半年	一年	三年
年利率（%）	2.10	2.30	2.50	3.75

（1）艾迪有 10000 元人民币，如果他按照三年期整存整取的方式存款，三年后他连本带利一共能从银行拿到 _____ 元人民币。（不计利息税）
（2）如果艾迪按照一年期整存整取连存三年（到期后本金和利息自动转成新一年的本金），三年后他连本带利一共能从银行拿到 _____ 元人民币。

分析

利息 = 本金 × 利率 × 时间

例 2 我国 2013 年 3 月 1 日所实行的税率标准，费用扣除标准较之前调高为 2000 元 / 月。表 4-2 所示为工资、薪金所得项目的税率：

表 4-2

级别	全月应纳税所得额	税率（%）
1	不超过 500 元部分	5
2	超过 500 元至 2000 元部分	10
3	超过 2000 元至 5000 元部分	15
4	超过 5000 元至 20000 元部分	20
5	超过 20000 元至 40000 元部分	25
…	……	…

表中“全月应纳税所得额”是指从月工资、薪金收入中减去 2000 元后的余额，它与相应税率的乘积就是应交的税款数。则在这种税率实行期间：

（1）王先生某个月的工资、薪金收入为 4480 元，该月份他交纳的税款是多少元？

（2）张先生某月份交纳了 1165 元个人所得税，该月份张先生工资、薪金收入是多少元？

分析

税款 = 应交税额 × 税率

收入 = 应发总额 − 税款

4.2 利润问题

例 3 乐乐老师开了一家手机零售店，请问：

（1）某手机的进价是 1000 元，售出价是 1200 元，这个手机的利润是多少？利润率是多少？

（2）某手机壳的进价是 108 元，定价是 180 元，实际上打七五折出售，这个手机壳的利润率是多少？

（3）某充电宝的进价是 800 元，标价是 1440 元，结果没人来买。乐乐老师决定打折出售，但希望利润率不能低于 35%，这个充电宝最低可以打几折？

分析

利润 = 售价 − 成本，利润率 = 利润 ÷ 成本 ×100%，

折扣 = 实际售价 ÷ 标价。

例 4 乐乐老师一次同时出售两部手机，售价都是 1800 元，一件是新品，可赚 20%；另一件是处理品，要赔 20%。就这两部手机而言，乐乐老师 _____（填“赚”或“赔”）了 _____ 元。

分析

两部手机成本不一样，分别算出成本进行比较，成本 = 售价 ÷（1+ 利润率）或成本 = 售价 ÷（1− 利润率）。（赚了用加号，亏了用减号）

4.3 综合应用

例 5 博士开了一家商店，卖各种各样的商品。

（1）一次他进了一批笔记本，按 30% 的利润率定价。当售出这批笔记本的 80% 后，为了尽早销完，博士决定把这批笔记本按定价的一半出售。问销完后商店实际获得利润的利润率是多少？

（2）后来博士以每双 13 元的价格购进一批拖鞋，售价为 14.8 元，卖到还剩 5 双时，除去购进这批拖鞋的全部成本外还获利 88 元。 问：这批拖鞋共有多少双？

（3）博士进了一件衣服，第一天按 80% 的利润率定价，无人来买；第二天在此基础上打九折，还是无人来买；第三天再降价 96 元，终于卖出。 已知卖出的价格是进价的 1.3 倍，求这件衣服的进价。

分析

（1）题中没有量，都是率，可以把笔记本的成本假设“1”求出定价。再按不同折扣分别求出售价，用总售价 − 成本 = 利润。

（2）总利润 ÷ 每件的利润 = 总件数。

（3）列方程求解，售价 − 成本 = 进价 ×1.3。

开放试题

快餐店有三种汉堡，鱼肉汉堡每个 7 元，鸡肉汉堡每个 9 元，牛肉汉堡每个 14 元。小明去快餐店买汉堡，他付款 100 元，找回 8 元。请问：小明买了多少个鸡肉汉堡？

笔记整理

1. 经济问题常用公式

售价 − 成本 = 利润

$$\text{利润率}=\frac{\text{利润}}{\text{成本}}\times 100\%=\frac{\text{售价}-\text{成本}}{\text{成本}}\times 100\%=\frac{\text{利润}}{\text{售价}-\text{利润}}\times 100\%$$

售价 = 成本×（1+ 利润率）

$$\text{成本}=\frac{\text{售价}}{\text{利润率}+1}$$

2. 利息问题常用公式

利息=本金×利率×时间

本讲巩固

1 自 2014 年 1 月 1 日起，某市推行农村合作医疗，农民每年每人只要拿出 10 元就可以享受到合作医疗。住院治疗的病人享受分段报销，保险公司制定的报销细则如表 4-3 所示：

表 4-3

住院医院费	报销率（%）
不超过 3000 元的部分	15
超过 3000 元不到 4000 元的部分	25
超过 4000 元不到 5000 元的部分	30
超过 5000 元不到 10000 元的部分	35
超过 10000 元不到 20000 元的部分	40
超过 20000 元的部分	45

某人住院后得到保险公司报销的金额是 766 元，求此人住院的医疗费是多少？

2 某种商品的进价为 800 元，出售时标价为 1200 元。后来由于该商品积压，商店准备打折出售，但要保持利润率不低于 5%，则最多可以打 _____ 折。

3 某专卖店同时出售了两件服装，售价都是 600 元，其中一件是新款服装，可盈利 20%，另一件是旧款服装，要亏损 20%，就这两件服装而言，该店 _____（填“赚”或“赔”）了 _____ 元。

4 某种商品按定价卖出可得利润 960 元，若按定价的 80% 出售，则亏损 832 元。商品的购入价是 _____ 元。

5 商店以每件 50 元的价格购进一批衬衫，售价为 70 元，当卖到只剩下 7 件的时候，商店以原售价的八折售出，最后商店一共获利 702 元，那么商店一共进了多少件衬衫？

第5讲 数论中的规律

前铺知识　位值原理 ▶▶ 韩信点兵 ▶▶

本讲内容

1. 平方数与余数的相关规律。
2. 寻找末尾连续 0 的个数。
3. 综合逻辑推理。

本讲故事

在魔法学校认识了新朋友，还穿上了漂亮的衣服，小勇士们太开心了！但是，还有艰巨的任务等待着他们。



赫敏·格兰杰是《哈利·波特》系列中的主要人物，她是哈利·波特和罗恩·韦斯莱的好朋友，极具爱心和正义感，同时对魔法有很高的天赋。



5.1 平方数与余数的相关规律

例 1 （1）1,11,111,1111,11111,…，中有 _____ 个完全平方数。

（2）4,44,444,4444,44444,…，中有 _____ 个完全平方数。

（3）5,55,555,5555,…，中有 _____ 个完全平方数。

分析

（1）由于奇数的平方是奇数，偶数的平方为偶数，而奇数的平方除以 4 余 1，偶数的平方能被 4 整除。现在这些数都是奇数，除 1 外其他的数除以 4 的余数都是 3，所以只有 1 是完全平方数。

（2）$4=4\times1$，$44=4\times11$，$444=4\times111$，$4444=4\times1111$，$44444=4\times11111$，…，由题（1）分析可得，只有 4 是完全平方数。

（3）$5=5\times1$，$55=5\times11$，$555=5\times111$，$5555=5\times1111$，$55555=5\times11111$，…，由题（1）分析可得，没有完全平方数。

例 2 1，14,144,1444,14444,…，中有 _____ 个完全平方数。

分析

完全平方数除以 3 只可能余 0 或 1；完全平方数除以 4 只可能余 0 或 1；完全平方数除以 8 只可能余 0,1 或 4；完全平方数除以 16 只可能余 0,1,4 或 9。

判断能否被 16 整除的特征是末 4 位，4444÷16=277……12。因此只有 1,144 和 1444 三个完全平方数。

例 3 求 143^{89} 除以 7 的余数。

分析

周期问题，143 除以 7 余 3，所以 $143^{89}\equiv3^{89}(\mathrm{mod}7)$，

表 5-1

	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	…
mod7	3	2	6	4	5	1	3	…

由表 5-1 所示，我们发现由 6 个数构成了一个周期，分别是 3,2,6,4,5,1，所以用 89 除以 6 余 5，143^{89} 除以 7 余 5。

练习1

（1）2^{20} 除以 7 的余数是多少？
（2）14^{14} 除以 11 的余数是多少？

5.2 寻找末尾连续 0 的个数

例 4 （1）从 1×2×3×4×…×30 这 30 个自然数连乘的末尾共 _____ 个连续的数码 0。
（2）如图 5-1 所示，已知五个数依次是 16,24,15,25,20 它们每相邻的两个数相乘得四个数，这四个数每相邻的两个数相乘得三个数。这三个数每相邻的两个数相乘得两个数，这两个数相乘得一个数。请问最后这个数从个位起向左数，可以连续数到几个 0？

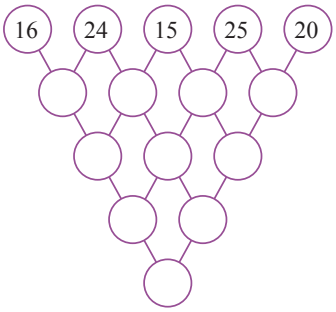


图 5-1

分析

（1）连续自然数的乘积，看因数 5 的个数就可以，因为 2 的个数一定多于 5 的个数，5 的倍数有 6 个，25 的倍数 1 个，所以因数 5 有 7 个，有 7 个连续的 0。
（2）几个整数的乘积，如果要确定它后面有几个 0，可以用这样的办法：把每个乘数分解质因数，把分解中 2 的重数加起来，5 的重数也加起来，看哪一个小，哪一个就是乘积尾部 0 的个数。

练习2

图 5-2 中最上排有五个数，将相邻两个数的乘积写在它们之间下方的圈内。第二排的四个数填完后，再依次填第三、四、五排，第五排中数 A 的末尾共有多少个 0？

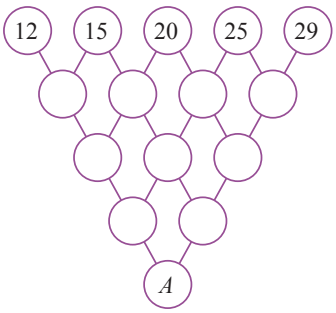


图 5-2

5.3 综合逻辑推理

例 5 （1）大家都看过《猫和老鼠》这部动画片吧。一天，汤姆（Tom）特别高兴，因为它终于抓到杰瑞（Jerry）了，并且还抓到了杰瑞的 100 个朋友。汤姆准备把它们分别关在从左到右编号为 1,2,3,…,101 的笼子里，然后排成一排。汤姆想逗逗杰瑞，于是对杰瑞说："我从 1 号开始吃，吃 1 留 2，吃 3 留 4，吃 5 留 6……每次都是吃掉一个留下一个，吃到最右边后，再返回左边继续吃，依次下去。你自己选个笼子，如果最后剩下的一个是你，你就可以走了。"同学们，你们能帮杰瑞选个笼子逃生吗？你们发现了什么规律？

（2）上次杰瑞侥幸逃跑了，可是这一天杰瑞又不幸被汤姆抓到了，而且汤姆还抓到了杰瑞的 31 个朋友。汤姆准备把它们分别关在编号为 1,2,3,…,32 的笼子里，然后围成一圈，并对杰瑞说："上次你侥幸逃跑了，这次我把你们围成一圈，我还是从 1 号开始吃，吃 1 留 2，吃 3 留 4，吃 5 留 6……每次都是吃掉一个留下一个，依次下去。你自己选个笼子，如果最后剩下的一个是你，你还是可以走。"同学们，这次你们还能帮杰瑞逃生吗？你们发现了什么规律？

（3）杰瑞已侥幸逃跑两次了，可是天有不测风云，杰瑞再一次不幸被汤姆抓到了，而且汤姆还抓到了杰瑞的 300 个朋友！汤姆不信杰瑞这次还能逃跑，于是还是定了和题（2）中一样的规则，同学们，这次杰瑞还能侥幸逃跑吗？如果能逃跑的话，杰瑞应选几号笼子才能逃生呢？

（4）如果汤姆抓到了杰瑞，且还抓到了杰瑞的 80 个朋友，还是从 1 号开始吃，但是要先吃 1 号和 2 号，留 3 号；吃 4 号和 5 号，留 6 号……每次都是吃掉两个留一个，依次下去。你们还能帮杰瑞逃生吗？能否发现什么规律？

（5）如果把题（4）中的 80 个朋友改为 300 个朋友，其他条件都不变，结果如何？

分析

（1）第一次吃到最右边剩下老鼠的编号为 2,4,6,…,100，第二次吃到最右边剩下的是 4 的倍数，依次下去，因此杰瑞应选 101 以内 2^n 最大的数，即 64。所以杰瑞应该选编号为 64 的笼子才可以逃生。

题（2）、题（3）、题（4）、题（5）同题（1）分析来找规律。

开放试题

日本数学家角谷静夫发现：任意给出一个比 1 大的整数，若是奇数就将它乘 3 再加 1；若是偶数则除以 2，则此数一定能变化成 1。（角谷猜想）

法国业余数学家费马发现 $2^{2^0}+1=2$ 是质数，$2^{2^1}+1=5$ 是质数，$2^{2^2}+1=17$ 是质数，$2^{2^3}+1=257$ 是质数，$2^{2^4}+1=65537$ 是质数。于是费马认为形如 $2^{2^n}+1$ 的数是质数，并将其命名为"费马数"。可惜他的推想出错了，欧拉发现 $2^{2^5}+1$ 不是质数。大家也可以在学习过程中总结一些数论中的规律，看看你能不能有所发现。

笔记整理

（1）完全平方数的性质
完全平方数除以 3 只可能余 0 或 1；
完全平方数除以 4 只可能余 0 或 1；
完全平方数除以 8 只可能余 0,1 或 4；
完全平方数除以 16 只可能余 0,1,4 或 9。
（2）多个数相乘末尾连续个“0”的规律：
10=2×5,100=2×2×5×5，把每个因数 2 和 5 分为一组，每组对应一个 0。有几组这样的配对，乘积的末尾就有几个连续的 0。
（3）猫捉老鼠隔一个吃一个的规律：
当老鼠排成一个圆圈时，规则为隔一个吃一个。当老鼠个数是 2^n 时，最后剩下的一只老鼠便是开始时被吃掉的第一只前面的那只老鼠，当老鼠个数不是 2^n 时，我们可以减去若干个数后变为 2^n，再用规律找到最后一个。

本讲巩固

1 已知：1234567654321×49 是一个完全平方数，请问它是哪个数的平方？

2 有一个正整数的平方，它的最后三位数字相同但不为 0，试求满足上述条件的最小正整数。

3 28^{121} 除以 13 的余数是多少？

4 50 到 100 这 51 个自然数的乘积的末尾有多少个连续的 0 ？

5 有 100 张卡片，从上到下依次编号为 1 ～ 100，从最上面的一张开始按如下的顺序进行操作：把最上面的第一张卡片拿掉，把下一张卡片放在这一叠卡片的最下面；依次重复这样做，直到手中剩下一张卡片。那么剩下的这张卡片是最初 100 张卡片里的第几张？

第6讲

旋转与轨迹

前铺知识 平移、旋转与对称 ▶▶ 圆柱与圆锥 ▶▶

本讲内容

1. 图形旋转。
2. 线动成面。
3. 面动成体。

本讲故事

艾迪为了帮助魔法学校的新生，得罪了马尔福。





“倒挂金钟”和“咒立停”都是《哈利·波特》一书中经常使用的咒语。这本书中有很多神奇的咒语，例如：伏地魔与哈利决斗时使用的“阿瓦达索命”，施咒后，会发出一道耀眼的绿光，中咒者立刻毙命。但最终伏地魔还是输给了哈利使用的“除你武器”，它是哈利经常使用的咒语之一，能使对方缴械。

智趣试题

如图 6-1 所示，两条直线相交于点 O。$\triangle ABC$ 的顶点 A 在其中一条直线上，顶点 B 在另一条直线上。如果保持 $\triangle ABC$ 的各边边长不变，让点 A 和点 B 在所在直线上滑动，那么点 C 描绘出来的轨迹是一个什么样的图形？

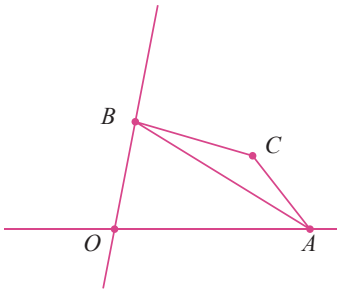


图 6-1



描绘出来的应该是一个椭圆。

6.1 图形旋转

知识剖析

1. 旋转的定义

把一个图形绕着某一点 O 转动一个角度的图形变换叫作旋转，点 O 叫作旋转中心，转动的角叫作旋转角，如果图形上的点 P 经过旋转变为点 P'，那么这两个点叫作这个旋转的对应点。（如图 6-2 所示）

注意：（1）研究旋转问题应把握两个元素：旋转中心与旋转角。

（2）每一组对应点所构成的旋转角相等。

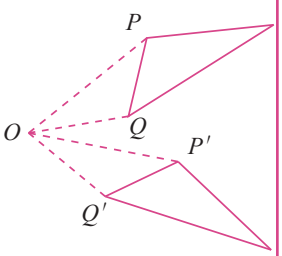


图 6-2

2. 旋转的性质

（1）旋转后的图形与原图形是全等的；（进而得到相等的线段、相等的角）

（2）旋转前后两个图形的对应点到旋转中心的距离相等；（进而得到等腰三角形）

（3）对应点与旋转中心所连线段的夹角都等于旋转角。（若为特殊角则得到等边三角形、等腰直角三角形）

3. 旋转作图的基本步骤

由旋转的性质可知，旋转作图必须具备两个重要条件：

①旋转中心；②旋转方向及旋转角度。

具体步骤分以下几步：

连，即连接图形中每一个关键点与旋转中心；

转，即把连线按要求绕旋转中心转过一定角度（作旋转角）。

例 1 （1）如图 6-3 所示的四边形面积是多少？

（2）如图 6-4 所示，一条直线上放着一个长和宽分别为 4 厘米和 3 厘米的长方形Ⅰ。它的对角线长恰好是 5 厘米。让这个长方形绕顶点 B 顺时针旋转 90° 后到达长方形Ⅱ的位置，这样连续进行三次，点 A 到达点 E 的位置。求点 A 走过的路程的长。（π 取 3.14）

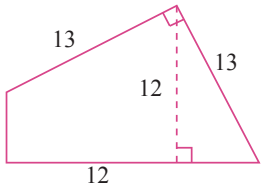


图 6-3

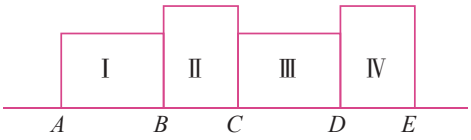


图 6-4

分析

（1）如图 6-5 所示，绕点 O 逆时针旋转 90 度就可以得到一个边长为 12 的正方形。

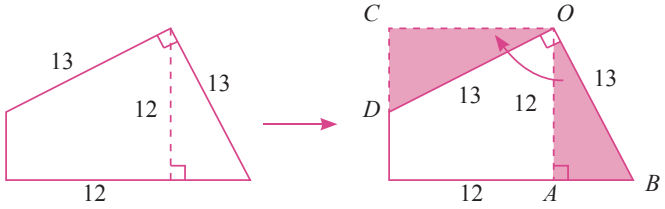


图 6-5

（2）找到旋转后对应的圆心角的度数。

因为长方形旋转了三段路程（如图 6-6 所示）。

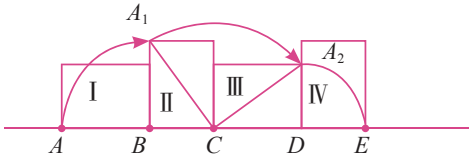


图 6-6

练习 1

如图 6-7 所示，$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$AB=3$，$BC=5$，以 AC 为一边向 $\triangle ABC$ 外作正方形 $ACDE$，中心为 O，求阴影部分的面积。

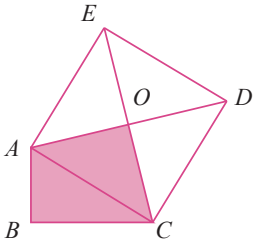


图 6-7

6.2 线动成面

例 2 草场上有一个长 20 米、宽 10 米的关闭着的羊圈，在羊圈的一角用长 30 米的绳子拴着一只羊（如图 6-8 所示）。请问：这只羊能够活动的范围有多大？（π 取 3.14）

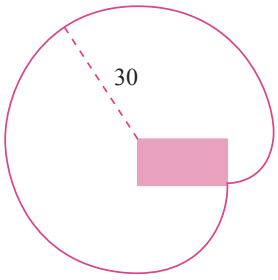


图 6-8

分析

如图 6-9 所示，羊活动的范围可以分为 A,B,C 三部分，其中 A 是半径 30 米的 $\frac{3}{4}$ 个圆，B,C 分别是半径为 20 米和 10 米的 $\frac{1}{4}$ 个圆。

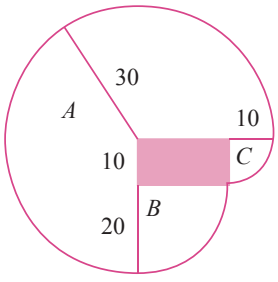


图 6-9

例 3 一个半径为 1 厘米的圆盘沿着一个半径为 4 厘米的圆盘外侧做无滑动的滚动，当小圆盘的中心围绕大圆盘中心转动 90 度后（如图 6-10 所示），小圆盘运动过程中扫出的面积是多少平方厘米？（π 取 3.14）

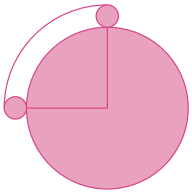


图 6-10

分析

小圆盘扫出的面积为四分之一圆环和一个小圆的面积。

练习2

如图 6-11 所示，一只羊被拴在一个长为 4 米，宽为 3 米的长方形的羊圈内，在 B 处有一个缺口，羊可以自由出入，拴绳长 9 米，请问羊能够到达的地方的面积约为多少平方米？（π 取 3.14，结果保留两位小数）

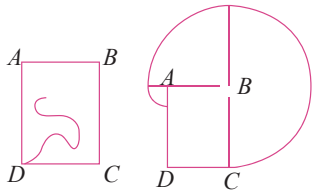


图 6-11

例 4

（1）线段 AB 长 10 厘米，绕点 A 顺时针旋转 90 度，所形成的图形面积是多少？

（2）如图 6-12 所示，Rt△ABC 的斜边 AB 长为 10 厘米，$\angle ABC=60°$，此时 BC 长 5 厘米。以点 B 为中心，将△ABC 顺时针旋转 120°，点 A,C 分别到达点 E,D 的位置。求 AC 边扫过的图形即图中阴影部分的面积。

（3）如图 6-13 所示，$ABCD$ 是一个长为 4，宽为 3，对角线长为 5 的正方形，它绕点 C 按顺时针方向旋转 90°，分别求出四边扫过图形的面积。（结果用 π 表示）

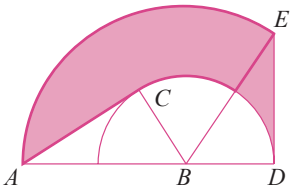


图 6-12

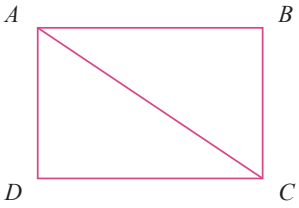


图 6-13

分析

（1）线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 90 度，所得图形为扇形，如图 6-14 所示，扇形的圆心角为 90 度，圆周半径为 10 厘米。

（2）注意分割、平移、补齐。

如图 6-15 所示，将图形①移补到图形②的位置，因为 $\angle EBD=60°$，那么 $\angle ABE=120°$，则阴影部分为一圆环的 $\frac{1}{3}$。

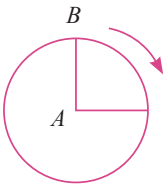


图 6-14

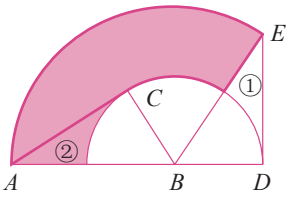


图 6-15

（3）①容易发现，DC 边和 BC 边旋转后扫过的图形都是以线段长度为半径的圆的$\frac{1}{4}$，如图 6-16 所示。

因此 DC 边扫过图形的面积为 4π，BC 边扫过图形的面积为$\frac{9\pi}{4}$。

② 研究 AB 边的情况。在整个 AB 边上，距离点 C 最近的点是点 B，最远的点是点 A，因此整条线段所扫过的部分应该介于这两个点所扫过的弧线之间，如图 6-17 中所示的阴影部分。

观察图形可以发现，所求阴影部分的面积实际上是

$S_{扇形ACA'}+S_{\triangle A'B'C}-S_{\triangle ABC}-S_{扇形BCB'}=S_{扇形ACA'}-S_{扇形BCB'}$

$=\frac{5^2\pi}{4}-\frac{3^2\pi}{4}=4\pi$。

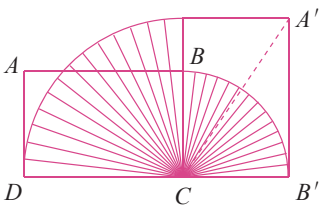


图 6-16

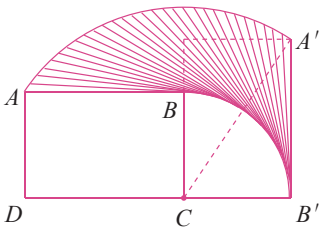


图 6-17

③ 研究 AD 边扫过的图形。

由于在整条线段上距离点 C 最远的点是点 A，最近的点是点 D，所以我们可以画出 AD 边扫过的图形，如图 6-18 阴影部分所示：

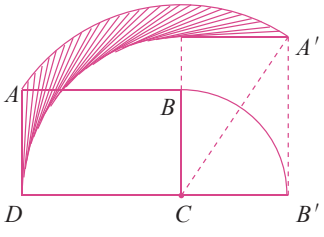


图 6-18

用与前面同样的方法可以求出阴影部分的面积：

$\frac{5^2\pi}{4}-\frac{4^2\pi}{2}=\frac{9}{4}\pi$

练习3

如图 6-19，将长方形 $ABCD$ 绕顶点 C 顺时针旋转 90 度，若 $AB=4$，$BC=3$，$AC=5$，求 AD 边扫过部分的面积。（π 取 3.14）

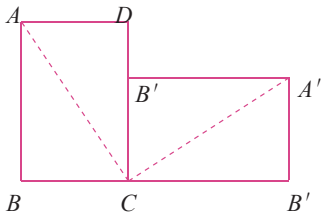


图 6-19

6.3 面 动 成 体

例 5 （1）一个长方形的长是 5 厘米，宽是 2 厘米，以其中的一条边为轴旋转一周，可以得到一个圆柱，圆柱体积最大是多少立方厘米？（π 取 3.14）

（2）已知直角三角形的三条边长分别为 3 厘米，4 厘米，5 厘米，分别以这三边为轴旋转一周，所形成的立体图形中，体积最小的是多少立方厘米？（π 取 3.14）

分析

（1）分别以长方形长、宽为轴旋转一周，得到的圆柱，算出体积进行比较。

（2）分别以三角形三边为轴旋转一周，得到两个圆锥和一个由两个圆锥合体的图形，求出体积进行比较。

开放试题

手指头上系一根绳子，绳子另一头挂一个重物，旋转这根绳子，将绳子缠在手指上。 这个过程中，重物的运动轨迹如图 6-20 所示。

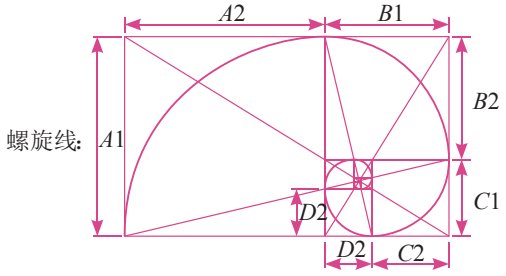


图 6-20

漆黑的夜晚，某自行车车胎上亮着一盏小灯，当自行车在黑夜中驶过时，你会看到一个亮点留下的轨迹，如图 6-21 所示。

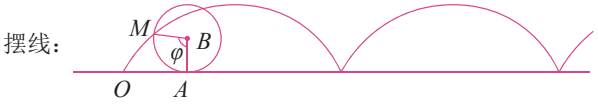


图 6-21

你还能举出生活中由于旋转而产生的轨迹的例子吗？

笔记整理

1. 轨迹

一个点在空间移动，它所通过的全部路径叫作这个点的轨迹。

2. 线动成面

一条线段绕固定点旋转一定的角度，只要找到线段距离固定点的最近点和最远点，然后绕固定点旋转所形成的图形的面积叫作这条线段扫过的面积。

3. 面动成体

长方形绕长或宽旋转所形成的图形是圆柱，直角三角形绕直角边旋转所形成的图形是圆锥。

本讲巩固

1 如图 6-22 所示，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，P 是三角形外的一点，其中 $\angle BPC=90°$，$AP=10\text{cm}$，求四边形 $ABPC$ 的面积。

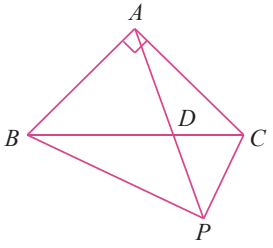


图 6-22

2 如图 6-23 所示，将边长为 1 的正三角形Ⅰ放在一条直线上，让三角形绕顶点 C 顺时针转动到达Ⅱ，再继续这样转动到达Ⅲ，则点 A 走过的路程的长为_____。（结果用 π 表示）

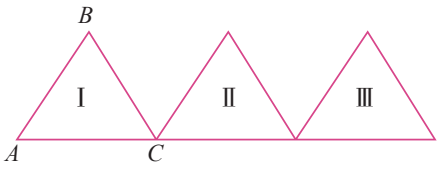


图 6-23

3 如图 6-24 所示，把一只狗用皮带系在 10×10 的正方形狗窝的一角上，皮带长为 14，在狗窝外面狗能活动的范围面积是多少？画出图形并计算。（狗的大小忽略不计，π=3，长度单位：分米）

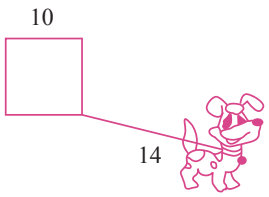


图 6-24

4 如图 6-25 所示，以 OA 为斜边的直角三角形的面积是 24 平方厘米，斜边长 10 厘米，将它以点 O 为中心旋转 90°，问：三角形扫过的面积是多少？（π 取 3）

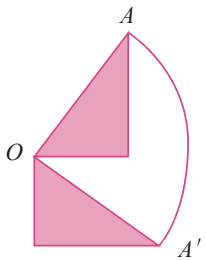
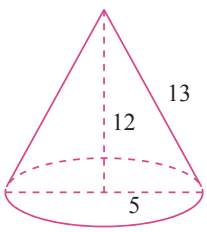
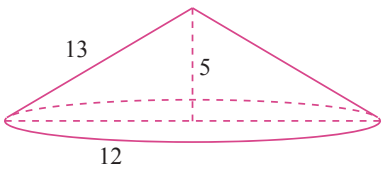


图 6-25

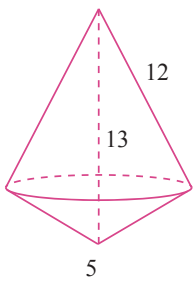
5 一个直角三角形的三条边的长度是 5,12 和 13，如果分别以各边为轴旋转一周，得到三个立体图形（如图 6-26 所示）。比较这三个立体图形的体积，体积最大的是_____，最大体积为_____。



（a）



（b）



（c）

图 6-26

第 7 讲

算 两 次

前铺知识　从反面情况考虑 ▶▶ 数形结合 ▶▶

本讲内容

1．应用题中的算两次。

2．图形中的算两次。

3．组合与计数中的算两次。

本讲故事

艾迪被马尔福捉弄，却意外发现了X别动队的记号，而大宽的沙漏又意外被偷……



黄花菜



“黄花菜（黄瓜菜）都凉了”，是对迟到的人或迟办的事调侃式的批评。黄瓜本身就是凉的，若说黄瓜菜都凉了，说明过的时间太久了。一说该词来源于苏轼名句“明日黄花蝶也愁”，后人先是把“黄花”变成了“黄花菜”，后来又变成了“黄瓜菜”。

智趣试题

有 10 块糖，分三天吃完，每天至少吃 1 块，共有多少种不同的吃法？

将 10 块糖如图 7-1 所示排成一排，这样每 2 块之间共有九个空，从头开始吃，若相邻 2 块糖是分在两天吃的，就在其间画一条竖线隔开表示之前的糖和之后的糖不是在同一天吃掉的，九个空中画两条竖线，一共有 $9\times8\div2=36$（种）方法。



图 7-1



7.1 应用题中的算两次

知识剖析

算两次，就是对同一个量从两个不同的角度进行计算，然后对两次计算出的结果进行比较，从而得到某个新的结论。算两次是在数学中经常用到的一种数学思想。从算两次的原理就可以看出，这种思想非常有利于发现题目中隐含的等量关系，某些复杂题目也可以在“算两次”的帮助下找到题目的要点。 这种思想特别适用于一些几何、组合或计数类的题目，以及证明一些式子相等的题目。

如果两种不同角度的计算结果是相等的，我们可以建立等量关系，例如，方程就是一种最常见的算两次思想的应用；如果两种不同角度的计算结果不是相等的，我们可以用来证明某些结论是不可能的。

例 1 某人在一条笔直的公路上以匀速骑自行车，速度是 v_1 米 / 分；公路两端的公交车站都是每隔 t 分钟就发出一辆公交车，公交车的速度为 v_2 米 / 分；这个人每隔 5 分钟迎面遇上一辆公交车，每隔 10 分钟有一辆公交车从他身后经过。请根据题目条件，列出等式， 求出 t。

分析

题中第一个过程是相遇，相遇的路程是公交车自己走完一个全程。第二个过程是追及，追及的路程是公交车自己走完一个全程。我们可以列两个方程求出 t。

7.2 图形中的算两次

例 2 （1）如图 7-2（a）所示，长方形被分割成 5 个正方形，已知原长方形的面积为 120 平方厘米，求原长方形的长与宽。

（2）如图 7-2（b）所示长方形被分割成 6 个正方形，已知中央小正方形的面积是 1 平方厘米，求原来长方形的面积。

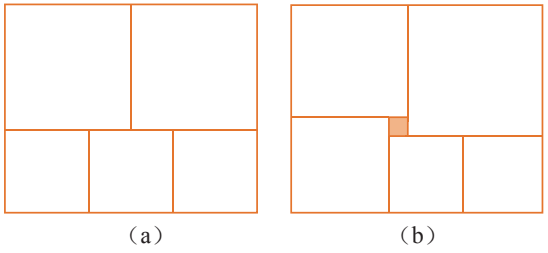


图 7-2

分析

（1）根据大正方形边长的 2 倍等于小正方形边长的 3 倍，可以列出方程。

（2）由于中央的小正方形的面积为 1 平方厘米，所以这个小正方形的边长为 1 厘米。为了求出长方形的面积，必须知道其它 5 个正方形的边长，这样就必须探究各个正方形边长之间的关系了。

如图 7-3（a）所示，把其余 5 个正方形依次编号，那么①号与②号正方形大小、形状完全相同。

不妨设①号正方形的边长为 x，那么有：⑤号正方形的边长为 $x+1$，④号正方形的变成为（$x+2$）；③号正方形边长为（$x+3$）。

另一方面，从图 7-3（b）中可以看出，③号正方形的边长也等于①号与②号正方形边长的和减去中央阴影正方形的边长，即等于（$x+x-1$）。

所以 $x+3=x+x-1$，由此可得 $x=4$。

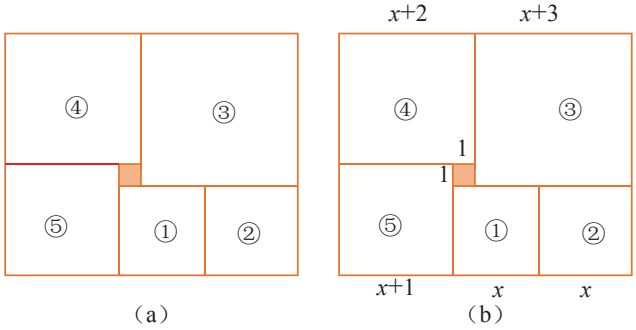


图 7-3

练习1

如图 7-4 所示，在长方形中放入六个形状、大小完全相同的长方形，则图中阴影部分的面积是多少？

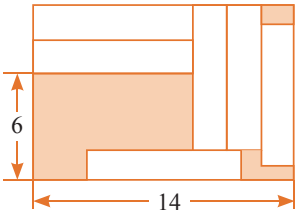
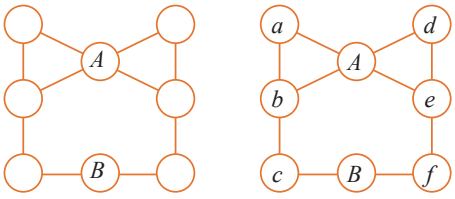


图 7-4

例3

将 1 ～ 8 这八个自然数分别填入如图 7-5（a）所示数阵中的八个圆圈，使得数阵中各条直线上的三个数之和都相等，那么 A 和 B 两个圆圈中所填的数之差（大数减小数）是_____。



（a）　（b）

图 7-5

分析

如图 7-5（b）所示，用字母来表示各个圆圈中的数字，设各条直线上的三个数之和都为 s，那么 $a+b+c+d+e+f=2s$，$a+A+e+b+A+d+c+B+f=3s$，所以 $2A+B=s$，$a+b+c+d+e+f+A+B=2s+A+B=5A+3B$，而 $a+b+c+d+e+f+A+B=1+2+\cdots+8=36$，所以 $5A+3B=36$，那么 A 是 3 的倍数。如果 $A=3$，得 $B=7$；如果 $A=6$，得 $B=2$，这两种情况下 A 和 B 的差都为 4。也可以列方程解答。

练习2

将 1,4,7,10,13,16,19,22,25 这九个数分别填入图 7-6 中的九个圆圈中，使三条边上圆圈中的四个数的和都相等。则每条边上四个数的和最大是_____。

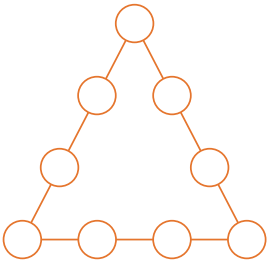


图 7-6

7.3 组合与计数中的算两次

例 4 把 18 拆分成不超过 7 个正整数之和的形式（不同的加数顺序只算 1 种），有 A 种方法；把 18 拆分成若干个不大于 7 的正整数之和的形式（不同的加数顺序只算 1 种），有 B 种方法。请问：A 和 B 哪个大？

分析

若想把 A,B 具体地算出来，一一罗列需很长时间，换一种角度考虑，借助图形来解决这个题目，先看 A，举一个例子：其中有一种分拆是 18=7+4+4+2+1（由于不同的加数顺序只算 1 种，所以我们可以规定加数由大到小排列），画出这个图形（如图 7-7 所示）再比较。

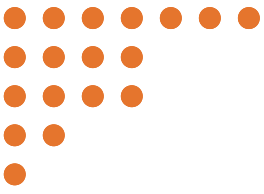


图 7-7

例 5 艾迪班上一共 n+1 人，作为班长，艾迪决定带领几名同学去打扫大厅。

艾迪心想：“选几个人去呢？我可以……”

全班同学心想：“我会不会被选中呢？我有可能……”

阅读材料到此为止，请说明下边这个组合式成立：

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$。

分析

阅读材料就是证明过程的提示，继续阅读材料：

① 艾迪的选法就是：不选人，自己去，有 C_n^0 种选法；选 1 个人，有 C_n^1 种选法；选 2 个人，有 C_n^2 种选法；……；选 n 个人（全去），有 C_n^n 种选法；故从艾迪的角度考虑……

② 从全班同学的角度考虑，每个人都只有两种情况：被选中，或没有被选中，故选法数是 2^n。

练习3

艾迪是他所在班级的班长，班里除了艾迪之外还有 n 名同学。某天放学之后，老师要求留下 k（$k \leqslant n+1$）名同学做值日，做值日的同学由艾迪挑选。那么艾迪究竟有几种挑选方法呢？他可以……

阅读材料到此为止，请说明右边这个组合式成立：$C_{n+1}^{k}=C_{n}^{k}+C_{n}^{k-1}$。

开放试题

一张正方形纸片上被针扎了 2013 个孔，这些孔和正方形顶点中任意三点都不共线。引若干条互不交叉的直线段，它们的端点都是这些孔或正方形的顶点，以将这些正方形分割成一些三角形，并且这些三角形内部和边上都不再有孔。请问：一共得到多少个三角形？一共引了多少条线段？（如图 7-8 所示）

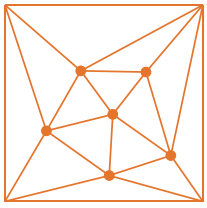


图 7-8

笔记整理

算两次，就是对同一个量从两个不同的角度进行计算，然后对两次计算出的结果进行比较，从而得到某个新的结论。

如果两种不同角度的计算结果是相等的，我们可以建立等量关系，例如，方程就是一种最常见的算两次思想的应用；如果两种不同角度的计算结果不是相等的，我们可以用来证明某些结论是不可能的。

本讲巩固

1 某商场的扶梯匀速向上运转，速度是 v_1 级 / 秒，共有 S 级台阶；艾迪上、下楼速度为 v_2 级 / 秒（$v_2 > v_1$）；若艾迪走这部扶梯上楼，只需 16 秒钟；若艾迪逆着这部扶梯下楼，则需 22 秒钟。请根据题目条件，列出等式。

2 用 8 个一样大的小长方形拼图，拼出了如图 7-9 中所示的两种图案：图 7-9（a）是一个正方形，图 7-9（b）是一个大的长方形；图 7-9（a）的中间留下了边长是 2 厘米的正方形小洞。求小长方形的长和宽。

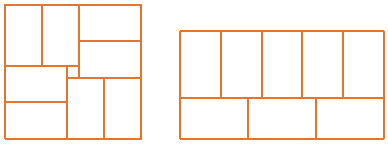


图 7-9

3 如图 7-10 所示，把图中的圆圈任意涂上红色或蓝色。请问：有无可能使得在同一条直线上的红圈数都是奇数？请说明理由。

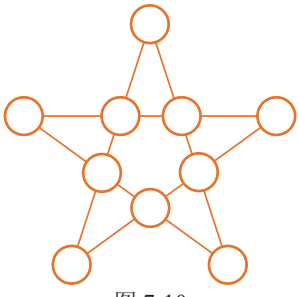


图 7-10

4 借助图形证明 1+2+3+4+5+4+3+2+1=1+3+5+7+9=5×5。

5 艾迪班上有 n 名同学，艾迪组织大家大扫除，决定选出 $r(r \leqslant n)$ 名同学去打扫大厅，但要求 r 名同学中要选出一个小组长。艾迪想：“有多少种选法呢？我可以先选小组，再让他们推荐出组长；也可以先指定组长，让组长挑选其他组员。”

阅读材料到此为止，请说明右边这个组合式成立：$rC_n^r = nC_{n-1}^{r-1}$。

第8讲

从极端考虑

前铺知识 数字谜中的最值

本讲内容

1．几何中的极端考虑。

2．数论中的极端考虑。

3．组合与计数中的极端考虑。

本讲故事

艾迪出题难倒了马尔福，决定在礼堂守株待兔，神秘人会再次出现吗？



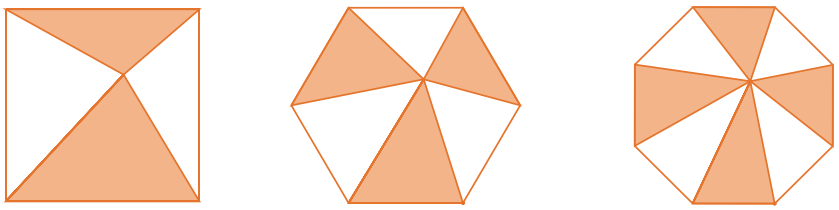
“魁地奇”是《哈利·波特》系列中重要的空中团队对抗运动，是魔法世界中由巫师们骑着飞天扫帚参加的球类比赛。参赛者分两队骑着飞天扫帚在空中飞行对抗，每队七人，各有一名守门员、三名追球手、两个击球手和一名找球手。作为一项球类运动，“魁地奇”最奇特之处在于同时使用三种不同的球进行比赛：“鬼飞球”“游走球”和“金色飞贼”。当“金色飞贼”被擒的时候，抓住它的那队获得150分，一场魁地奇比赛也就宣告结束了。

8.1 几何中的极端考虑

例 1 （1）图 8-1（a）中的正方形面积为 4，阴影部分面积为_____。

（2）图 8-1（b）中的正六边形面积为 6，阴影部分面积为_____。

（3）图 8-1（c）中的正八边形面积为 8，阴影部分面积为_____。



（a） （b） （c）

图 8-1

分析

(1)、(2)、(3) 都按极端思想考虑，图中的点可以看成中心点。

练习 1

图 8-2 中的正十边形面积为 10，阴影部分面积为_____。

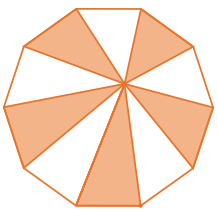
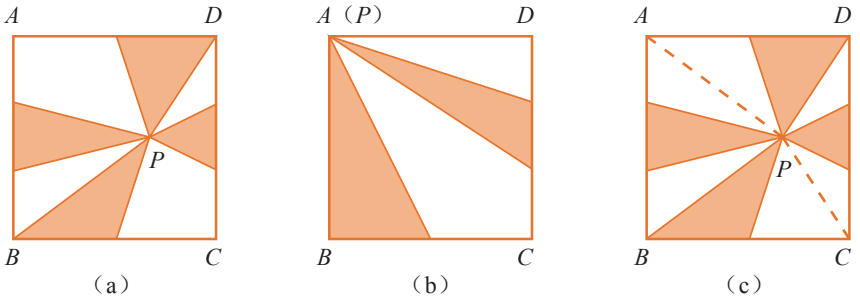


图 8-2

例 2 如图 8-3（a）所示，在边长为 6 厘米的正方形 $ABCD$ 内任取一点 P，将正方形的一组对边二等分，另一组对边三等分，分别与点 P 连接，求阴影部分面积。



（a） （b） （c）

图 8-3

分析

方法一：特殊点法。由于 P 是正方形内部任意一点，可采用特殊点法，假设点 P 与点 A 重合，则阴影部分变为如图 8-3（b）所示，图中两个阴影三角形的面积分别占正方形面积的 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{6}$。

方法二：如图 8-3（c）所示，连接 PA,PC。
由于△ PAD 与△ PBC 的面积之和等于正方形 $ABCD$ 面积的一半，所以上、下两个阴影三角形的面积之和等于正方形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{4}$，同理可知左、右两个阴影三角形的面积之和等于正方形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{6}$。

练习2

$ABCD$ 是边长为 12 的正方形，如图 8-4 所示，P 是内部任意一点，$BL=DM=4$，$BK=DN=5$，那么阴影部分的面积是_____。

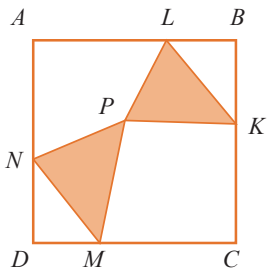


图 8-4

8.2 数论中的极端考虑

例 3 将 2009 加上一个三位数，使它能被 17 与 19 整除，那么所加的三位数中，最大是多少？最小是多少？

分析

采用试除法，[17,19]=323，
求最大是多少，我们假设加上的是 999，那么 (2009+999)÷323=9……101，多了 101。求最小是多少，假设加上的是 100，那么 (2009+100)÷323=6……171，少了 323−171=152。

例 4 用 1 ～ 9 这九个数字组成三个三位数（每个数字都要用），每个数都是 11 的倍数，那么这三个三位数中最大数和最小数之差最大可能是 _____。

分析

每个数都是 11 的倍数，即每个数奇数位的和减偶数位（中间数）都是 11 的倍数，那么所有奇数位的和减去三个中间数得到的差也是 11 的倍数，而所有奇数位加三个中间数的和为 45，所以可以求出三个中间数的和为 6 或 17。
因为最大数和最小数要拉开差距，所以最好是 9 和 1 在百位，则中间数的和取 17，
9 开头的数尽量大：968,957,946,935,924，
1 开头的数尽量小：132,143,154,165,176,187，
只要第三个数能构造成功即可，如果是 968 和 132 则无法得出第三个数，而 968,275,143 是可以的。

练习3

用 1 ～ 9 这九个数字组成三个三位数（每个数字都要用），每个数都是 4 的倍数，那么这三个三位数中最小的一个最大可能是 _____。

8.3 组合与计数中的极端考虑

例 5 学而思杯足球赛，每个小组有 6 支球队，每两队之间各赛一场，胜一场得 3 分，负一场得 0 分，平局各得 1 分。每个小组总分最多的三支球队出线。如果在第一小组比赛中只出现了一场平局，请问：在第一小组中一支球队至少得多少分才一定能够出线？

分析

考查两支球队之间进行比赛所获得的分数，如果产生胜负关系，那么两队总得分为 3 分，如果平局，则总得分为2分。6支队伍相互间需要进行15场比赛，如果不出现平局，得分总和应该为 45 分，但是出现了一场平局，因此所有队的得分总和为 45−1=44（分）。

如果某队的总分超过所有队得分总和的$\frac{1}{4}$，则必出线，所以得 12 分能保证出线。因为只有一场平局，所以不会出现 11 分。如果 10 分不出线，前 4 队的得分情况只能是 12,12,10,10（10 分肯定有一场平局，所以最多有 2 队得 10 分），显然不可能出现这样的情况。9 分则很容易产生不出线的情况（例如 9,9,9,9,4,4），所以至少得 10 分才一定能够出线。

练习 4

12 个队参加一次足球比赛，每两个队都比赛一场，每场比赛中，胜队得 3 分，负队得 0 分，平局则各得 1 分。比赛完毕后，获得第 3 名和第 4 名的两个队的得分最多可能相差多少分？

开放试题

在一块平地上有 n 个人，每个人到其他人的距离均不相同，每人都有一把水枪。当发出信号后，每人用水枪击中距离他最近的人。证明：当 n 为奇数时，至少有一个人的身上是干的。

笔记整理

极端思想是指把问题的某一条件引向极端来加以考查的一种数学思想。

数学中也有很多问题，如果对极端状态的研究，可以有效避开复杂的计算，优化解题的方法，使复杂问题简单化，抽象问题具体化，从而使问题迅速得到解决。

极端思想根据问题类型的不同，方法也有所不同：对于数值类问题来说，极端思想一般是指取最特殊的值（最常见的是取最大或最小值）；对于几何中有关动点的问题来说，极端思想一般是取边界点（一般取顶点或者中心位置的点）；还有一类问题是通过假设极端的情况来确定边界范围，再逐步调整。在最大、最小、最长、最短、最多、最少、最左和最右等极端的状态下，往往能使问题的关键暴露出来，帮助我们找到解题的途径。

本讲巩固

1 已知△ABC，$AB=AC=12$ 厘米，△ABC 的面积是 42 平方厘米，P 是 BC 上任意一点，点 P 到 AB,AC 的距离分别是 x 厘米和 y 厘米，那么 $x+y=$_____。

2 如图 8-5 所示，*ABCDEF* 是面积为 24 的正六边形，*G,H,I* 分别为 *AB,CD,EF* 上的三等分点，*J* 为六边形内任一点，阴影部分面积为 _____。

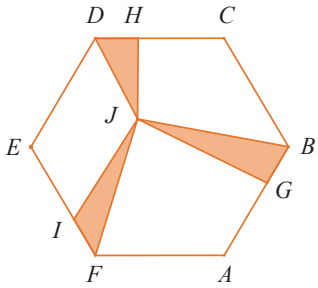


图 8-5

3 在 2012 后面添 3 个数字变成一个七位数，使这个七位数能被 4 和 41 整除，问这样的七位数最小是多少？

4 90 个苹果 5 个小朋友分，每人分得的个数各不相同，其中最多的得了 21 个，分得最少的小朋友至少能得_____个。

5 世界杯小组赛 4 支球队进行单循环赛，每场胜者积 3 分，平局各积 1 分，负者积 0 分，前两名出线，后两名出局，那么出线队伍可能得到的最低分和出局队伍可能得到的最高分之间相差多少？

第 9 讲

数字谜中的计数

前铺知识　数论中的组合 ⏩ 最值问题综合 ⏩

本讲内容

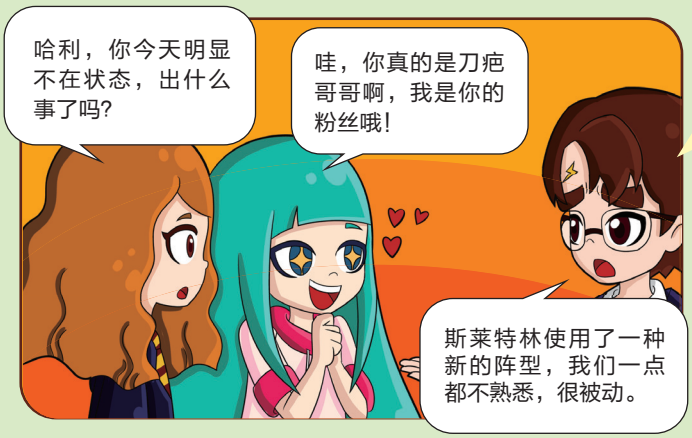
1．枚举计数。

2．加乘原理计数。

3．综合计数。

本讲故事

赫敏和艾迪一行去看魁地奇比赛，看到了马尔福和神秘人……

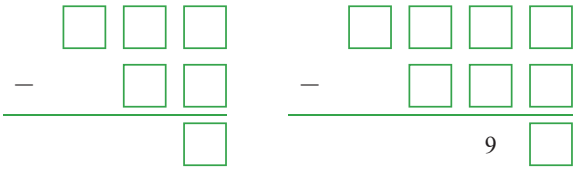




斯莱特林是霍格沃茨的四大学院之一。格兰芬多代表火，象征勇敢；拉文克劳代表风，象征智慧；赫奇帕奇代表土，象征朴实；斯莱特林代表水，象征高贵。四大元素同时存在时，构成了一个完整的体系。马尔福和伏地魔都出自斯莱特林，而哈利和赫敏都出自格兰芬多。

9.1 枚举计数

例 1 （1）每个方格填一个数字，要满足图 9-1（a）中的算式共有多少种填法？
（2）每个方格填一个数字，要满足图 9-1（b）中的算式共有多少种填法？



（a）　　（b）

图 9-1

分析

（1）只能是如图 9-2 所示：

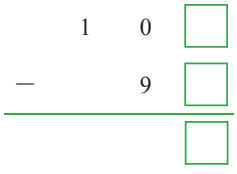


图 9-2

当三位数为 100 时，两位数可以填 91 ～ 99 共 9 种；
当三位数为 101 时，两位数可以填 92 ～ 99 共 8 种；
当三位数为 102 时，两位数可以填 93 ～ 99 共 7 种；
……
当三位数为 108 时，两位数可以填 99 共 1 种。

（2）只能是如图 9-3 所示，且被减数的个位必须向十位数借位，因此被减数和减数的十位数字必须相同。

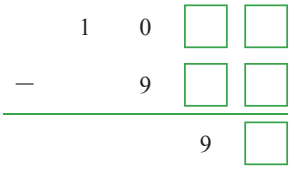


图 9-3

练习 1

每个方格填一个数字，要满足图 9-4 中的算式共有多少种填法？

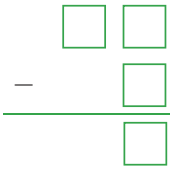


图 9-4

例 2 图 9-5 中所示的是三位数与一位数相乘的算式，每个方格填入一个数字，要使算式成立，那么共有_____种不同的填法。

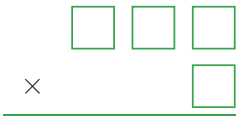


图 9-5

分析

将 1992 分解成 1992=2×2×2×3×83。易知 1992 的因数是一位数的只有 6 个，即 1,2,4,8,3,6。

练习2

图 9-6 中所示的是三位数与一位数相乘的算式，每个方格填入一个数字，要使算式成立，那么共有_____种不同的填法。

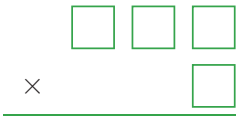


图 9-6

9.2 加乘原理计数

例 3 从 1 ～ 9 中选 8 个数填入到图 9-7 中的□里，要使等式成立，一共有多少种不同的填法？



图 9-7

分析

去掉一个数字，只能去 1,3,5,7,9 中的一个，有 5 种去法，否则无法相互配对。比如去掉 1，则相邻两数相互配对，再把每组排序。

例 4 在如图 9-8 所示的算式中，汉字“第”“十”“一”“届”“华”“杯”“赛”分别代表 1～9 中的某个数字，不同的汉字代表不同的数字，恰使得加法算式成立，请问不同的代表方法共有多少种？

	第	十	一	届
十		华	杯	赛
	2	0	0	6

图 9-8

分析

显然十位和百位都出现了进位，所以有以下的等式：“第”=1，“十”+“华”=9，如果“届”+“赛”没有出现进位，那么“一”+“杯”=10，“届”+“赛”=6，则“届”和“赛”一个是 2 另一个是 4，那么“一”+“杯”中有一个小于 5 的数必然是 3，另一个是 7，这样，就不存在不重复的“十”和“华”使它们的和是 9，所以“届”+“赛”必定出现进位。

那么“一”+“杯”=9，“届”+“赛”=16，所以“届”和“赛”是 9,7，“一”“杯”和“十”“华”取 3,6 和 4,5。

9.3 综合计数

例 5 一个六位数 $\overline{abcdef}$，如果满足 $4\times\overline{abcdef}=\overline{fabcde}$，则称 $\overline{abcdef}$ 为“迎春数”（例如 $4\times102564=410256$，则 102564 就是“迎春数”）。请你求出所有“迎春数”的总和。

分析

将题目写成竖式数字谜：

$$\begin{array}{r} abcdef \\ \times\quad\quad 4 \\ \hline fabcde \end{array}$$

因此 $f\geqslant4$，当 $f=4$ 时，推得 $e=6$，进而得到 $d=5$,

$c=2, b=0, a=1$，即

$$\begin{array}{r} 1\,0\,2\,5\,6\,4 \\ \times\qquad\qquad 4 \\ \hline 4\,1\,0\,2\,5\,6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,2\,8\,2\,0\,5 \\ \times\qquad\qquad 4 \\ \hline 5\,1\,2\,8\,2\,0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\,5\,3\,8\,4\,6 \\ \times\qquad\qquad 4 \\ \hline 6\,1\,5\,3\,8\,4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,7\,9\,4\,8\,7 \\ \times\qquad\qquad 4 \\ \hline 7\,1\,7\,9\,4\,8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\,0\,5\,1\,2\,8 \\ \times\qquad\qquad 4 \\ \hline 8\,2\,0\,5\,1\,2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,3\,0\,7\,6\,9 \\ \times\qquad\qquad 4 \\ \hline 9\,2\,3\,0\,7\,6 \end{array}$$

此题还可以用整体换元法来解。

练习3

如果 $\overline{ab}\times 7=\overline{a0b}$，那么 $\overline{ab}$ 等于几？

开放试题

“回文数”是一种特殊的数，如 156651，141 等，这些数正着读和倒着读都一样，我们称这种数为回文数。现在我们知道如图 9-9 所示竖式中的被除数是一个回文数，且恰好整除，那么所有满足条件的被除数之和是 _____。

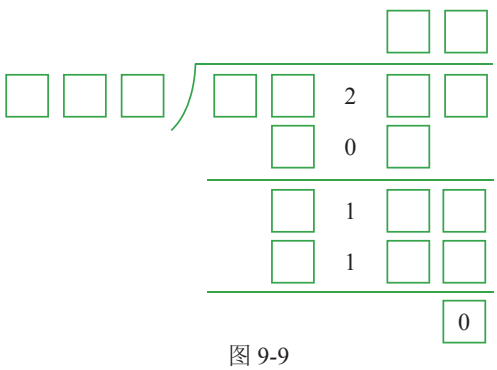
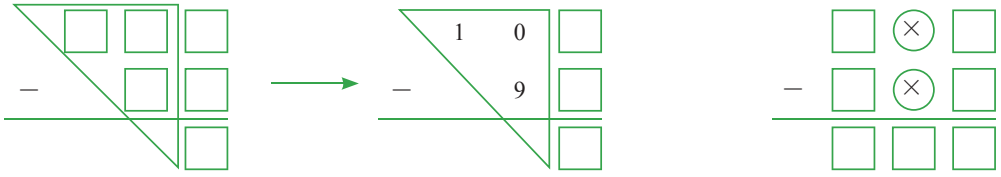


图 9-9

数字谜分为竖式数字谜和横式数字谜。一般有加减乘除四类。

竖式数字谜掌握下面方法：

六位分析法：首位分析法；个位分析法；1,0,9 三角空位分析法（见图 9-10（a））；进位和借位分析（每进位一次数字和少 9）；加减法中的不变位分析（见 9-10（b））；除法竖式中的继承位。另外，要学会估算和试算。



（a）　　（b）

图 9-10

在图 9-10（a）中，如果出现图中所示三角，那么一定填 1,0,9 这三个数字，且减数的个位一定比被减数个位大，所以一定不为 0。在图 9-10（b）中，两个数十位数字相同，我们称为不变位，那么对应的差应该填 0 或 9。

横式谜中要注意两种分析法：分解质因数和位值原理。

本讲巩固

1 杭州的九溪十八涧是一处非常著名的景点，曾有一首诗描写其妙处：

重重叠叠山，曲曲环环路。

叮叮咚咚泉，高高下下树。

这首叠字诗的结构有一特点：每句都是 $AABBC$ 的形式。

现在有等式 $A+\overline{AB}=\overline{BC}$ 的形式，其中相同字母代表相同数字，不同字母代表不同数字，每个字母表示从 1 到 9 的某个数字。请问一共有多少个这样的算式，并说明理由。

2 每个方格填一个数字，要满足图 9-11 中的算式共有多少种不同的填法？

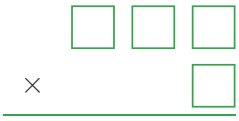


图 9-11

3 每个方格填一个数字，要满足图 9-12 中的算式共有多少种填法？

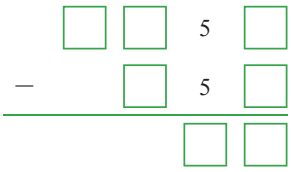


图 9-12

4 如图 9-13 所示的算式中，汉字“第”“七”“届”“冬”“令”“营”分别代表 0 ～ 7 这 8 个整数中某个数字，不同汉字代表不同数字，恰好使等式成立，则这样的减法算式成立的可能有多少种？

	第	七	届	冬
−			令	营
	2	0	0	7

图 9-13

5 在 123456789 相邻的两个数中间填减号或加号（不可以不放运算符号）运算后等于 31，有几种填法？

第10讲

工程问题进阶

前铺知识　工程问题初步 ▶▶ 应用题综合（二）▶▶

本讲内容

1．合作类工程问题（整体法）。

2．功倍时半。

3．综合工程问题。

本讲故事

艾迪帮助哈利等人战胜了马尔福的球队，要继续完成自己的任务……



防御工事：在防御战中为了减少伤亡，阻碍敌人进攻而在有利地形上构筑的筑城工事。包括射击工事、交通工事和掩蔽工事等。比如我国伟大的建筑——长城，就是当年秦始皇为了抵御匈奴的攻击而修建的。抗日战争时期修建的地道也属于防御工事，可以使人们藏身其中而躲过扫荡。也有防御工事是为了抵御自然灾害，比如詹姆斯等人为了抵抗陨石风暴而建的防御工事。

知识剖析

1. **工程问题的三个公式（量率对应）**

工作效率 × 工作时间 = 工作总量

工作总量 ÷ 工作时间 = 工作效率

工作总量 ÷ 工作效率 = 工作时间

2. **常见合作类问题**

（1）多人合作问题（已知合做求独做）——等量代换（包括和差倍分法、比例法和假设法）

这类题目包含两种类型的等量关系：一种已知不同工作效率或工作时间之间的和差倍分关系，另一种靠工作总量建立等量关系。前者按照和差倍分问题解决即可，后者依靠总量关系列出等式。

（2）助人为乐问题——合并工程法

基本做法为将两项工程合二为一，按照三人合作的题目来求出完成时间，最后再将两项工程分拆，求出第三人分别帮忙的时间。

（3）交替工程问题——周期与估算

从不同人开始的交替中找出周期性，去掉完整周期，最后一个不完整周期按顺序依次微调。

10.1 合作类工程问题（整体法）

例 1 （1）一项工程，甲、乙合作需要 20 天完成，乙、丙合作需要 15 天完成，由乙单独完成需要 30 天，那么如果甲、乙、丙合作，完成这项工程需要多少天？

（2）要灌满一个水池，如果同时打开 1,2,3 号阀门，则 20 分钟可以完成；如果同时打开 2,3,4 阀门，则 21 分钟可以完成；如果同时打开 1,3,4 号阀门，则 28 分钟可以完成；如果同时打开 1,2,4 号阀门，则 30 分钟可以完成。请问：如果同时打开 1,2,3,4 号阀门，那么多少分钟可以完成？

分析

（1）如果将整个工程的工作量看作单位“1”，从条件中我们很容易看出：甲 + 乙 = $\frac{1}{20}$，乙 + 丙 = $\frac{1}{15}$，乙 = $\frac{1}{30}$，因此不难得到三人的工作效率之和为 $\frac{1}{20}+\frac{1}{15}-\frac{1}{30}=\frac{1}{12}$，也就是说，三个人合作需要 12 天可以完成。

（2）根据条件，列表如表 10-1 所示（画○表示阀门打开，画 × 表示阀门关闭）：

表 10-1

1 号	2 号	3 号	4 号	工作效率
○	○	○	×	$\frac{1}{20}$
×	○	○	○	$\frac{1}{21}$
○	×	○	○	$\frac{1}{28}$
○	○	×	○	$\frac{1}{30}$

从表 10-1 中可以看出，每个阀门都打开了三次，所以这 4 个阀门的工作效率之和为：$\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\frac{1}{30}\right)\div 3=\frac{1}{18}$，然后再用工作总量除以工作效率。

练习 1

A,B,C,D,E 五个人干一项工作，若 A,B,C,D 四人一起干需要 6 天完成；若 B,C,D,E 四人一起干需要 8 天完工；若 A,E 两人一起干需要 12 天完工。请问：若 E 一人单独干需要几天完工？

例 2 （1）有两个同样的仓库，搬运完其中一个仓库的货物，甲需要 6 小时，乙需要 7 小时，丙需要 14 小时。甲、乙同时开始各搬运一个仓库的货物，开始时，丙先帮甲搬运，后来又去帮乙搬运，最后两个仓库的货物同时搬完。则丙帮了甲_____小时，帮了乙_____小时。

（2）甲、乙、丙三队要做 A,B 两项工程，B 工程的工作量比 A 工程的工作量多 $\frac{1}{4}$，甲、乙、丙三队单独完成 A 工程所需时间分别是 20 天、24 天、30 天，为了同时完成这两项工程，先派甲队做 A 工程，乙、丙两队共同做 B 工程，经过几天后，又调丙队与甲队共同完成 A 工程，请问丙队与乙队合作了几天？

分析

（1）两个仓库的工作总量是 2，求出甲、乙、丙的工作时间。然后求出甲的工作总量，从而求出丙帮甲的工作总量，用丙帮甲的工作总量除以丙的工作效率即可。

（2）同小题（1）分析求出 A,B 的工作总量和是 $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$，然后求出三队用的时间，求出乙的工作总量，从而求出丙帮乙的工作总量，再用丙的工作总量除以丙的工作效率即可。

10.2 功倍时半

例 3 甲、乙合做一件工作，由于配合得好，甲的工作效率比单独完成时提高 $\frac{1}{10}$，乙的工作效率比单独完成时提高 $\frac{1}{5}$，甲乙两人合作 6 小时，完成全部工作的 $\frac{2}{5}$，第二天乙又单独做了 6 小时，还留下这件工作的 $\frac{13}{30}$ 尚未完成。如果这件工作始终由甲一人单独来做，需要多少小时？

分析

先求出乙 6 小时单独完成的工作量，再求出甲 6 小时完成的工作量，进而求出甲 1 小时的工作量，再用甲的工作总量除以甲的工作效率即可。

例 4 加工一批零件，甲单独做需要 60 小时，乙单独做需要 50 小时，已知乙每小时比甲多做 12 件，如果甲的工作效率提高 40%，而乙每小时比原来多做 4 件，请问两人合做这批零件的 $\frac{2}{3}$ 需要多少小时？

分析

用分量 12 除以他们的工作效率差求出总件数，再分别求出甲、乙的工作效率，用工作总量除以工作效率即可。

练习2

甲、乙两个工程队负责一个工程，按正常进度施工，需要 60 天完成，现在甲工作队效率增加一倍，乙工作队效率降低一半，需要 84 天完工，则甲工作队单独完成这项工作需要_____天。

10.3 综　　合

例 5 （1）轮换交替类工程

一项工程，乙单独做要 14 天完成；如果第一天甲做，第二天乙做，第三天甲做，第四天乙做……两人这样轮流做，需要 9 天完工；如果第一天乙做，第二天甲做，第三天乙做，第四天甲做……两人这样轮流做，会比第一种轮流的做法多用多少天？

（2）量率结合类工程

某项工程，由甲、乙两队承包，$2\frac{2}{5}$ 天可以完成，需支付工程款 1800 元；由乙、丙两队承包，$3\frac{3}{4}$ 天可以完成，需支付工程款 1500 元；由甲、丙两队承包，$2\frac{6}{7}$ 天可以完成，需支付工程款 1600 元。现在决定将工程承包给某一个队，确保工程在一个星期内完成，且支付的工程款最少，请问所支付的工程款是多少元？

分析

（1）分别求出甲、乙的工作效率。

乙的效率为$\frac{1}{14}$，甲的效率为$\left(1-\frac{1}{14}\times 4\right)\div 5=\frac{1}{7}$，

如果第一天乙做，9 天之后还差$\frac{1}{7}-\frac{1}{14}=\frac{1}{14}$，所以比上次轮流的做法多用$\frac{1}{14}\div\frac{1}{7}=\frac{1}{2}=0.5$（天）。

（2）先分别求出甲、乙，甲、丙和乙、丙一起完成时的工作效率，然后求出甲的工作效率，可以求出甲单独完成的时间，同理求出乙、丙单独完成的时间。然后根据工作量来分配工程款。

练习3

一项工程，第一天甲做，第二天乙做，第三天甲做，第四天乙做，这样交替轮流做，那么恰好用整数天完工；如果第一天乙做，第二天甲做，第三天乙做，第四天甲做，这样交替轮流做，那么完工时间要比前一种方式多半天。已知乙单独完成这项工程需要 20 天，则甲单独完成这项工程需要 _____ 天。

开放试题

每年春节前夕，家里都会大扫除，爸爸擦玻璃，妈妈扫地，你先帮爸爸再帮妈妈。算一算，你要帮助爸爸多久，再去帮助妈妈，才能让他们同时干完？

笔记整理

（1）在工程问题或其他分百应用题中，都可以按照量率对应解题。

（2）工程问题的三个公式都可以通过第一个公式经过简单的运算推导出；在合作问题中，工作效率可以叠加，但工作时间不能简单地叠加，这是因为时间是用总量除以效率得到的，而商一般不能简单地叠加；在工程总量未知时，常常把总量假设为单位“1”。

（3）常见工程问题

① 基本工程问题

② 多人合作问题

③ 工作效率变化问题

④ 方程（组）解工程问题

本讲巩固

1 一件工作，甲、乙两人合做要 36 天完成，乙、丙两人合做要 45 天完成，甲、丙两人合做要 60 天完成。问甲一人单独做需要多少天完成？

2 某工程如果由第一、二、三小队合干需要 12 天才能完成；如果由第一、三、五小队合干需要 9 天才能完成；如果由第二、四、五小队合干需要 8 天才能完成；如果由第一、三、四小队合干需要 18 天才能完成。那么这五个小队一起合干需要多少天才能完成这项工程？

3 一份文件，如果甲抄 10 小时，乙抄 10 小时可以抄完；如果甲抄 8 小时，乙抄 13 小时也可以抄完。现在甲先抄 2 小时，剩下的甲、乙合抄，还需要几小时才能完成？

4 一项工程，甲单独做需 10 天，乙单独做需 15 天。如果两人合做，甲的工作效率就要降低，只能完成原来的$\frac{4}{5}$，乙只能完成原来的$\frac{9}{10}$。现在要 8 天完成这项工程，两人合做天数尽可能少，那么两人至少要合做多少天？

5 一项工程，甲单独做要 6 小时完成，乙单独做要 10 小时完成。如果按甲、乙、甲、乙……这样的顺序交替工作，每人工作 1 小时后交换，那么需要多少小时才能完成任务？

第11讲

变速问题

前铺知识　环形跑道 ▶▶ 多次相遇与追及 ▶▶

本讲内容

1. 简单的变速问题。
2. 比例法解变速问题。
3. 环形跑道上的变速问题。

本讲故事

小勇士们带回了宇宙罪犯——曾经的X别动队勇士詹姆斯，完成了任务，小勇士们也在这个过程中慢慢地成长为真正的勇士!



11.1 简单的变速问题

例 1 （1）乐乐从家到学校时，前一半路程步行，后一半路程乘车；他从学校回家时，前$\frac{1}{3}$时间乘车，后$\frac{2}{3}$时间步行。结果去学校的时间比回家所用的时间多 2 小时。已知乐乐步行每小时行 5 千米，乘车每小时行 15 千米。那么，乐乐从家到学校的路程是_____千米。

（2）乐乐从家去学校领校服。去时他步行 5 分钟后，跑步 8 分钟到达学校；回来时，他先步行 10 分钟后，开始跑步，结果比去时多用了 3 分 15 秒钟回到家。他跑步速度与步行速度的比是多少？

分析

（1）先求出乐乐去时的平均速度和回来时的平均速度。因为路程一定，去时与回来时的时间比等于速度的反比。然后根据去学校比回家多出 2 小时求出去时的时间，用时间乘以速度即可。

（2）根据题意，去学校步行 5 分钟，跑步 8 分钟；回家时步行 10 分钟，跑步 6 分 15 秒的路程相同，因此步行 10−5=5（分）和跑步$8-6\frac{1}{4}=1\frac{3}{4}$（分）路程相同。所以跑步速度与步行速度比为$5:1\frac{3}{4}=20:7$。

练习 1

乐乐从家到学校有两条一样长的路，一条是平路，另一条是一半上坡路，一半下坡路。乐乐上学走这两条路所用的时间一样多。已知下坡的速度是平路的 1.6 倍，请问乐乐上坡的速度是平路速度的多少倍？

11.2 比例法解变速问题

例 2 （1）8 点出发，原定 13 点到达，出发后车速提高了 25%，现在几点能到达？

（2）从北京到 G 城的特别快车在 2000 年 10 月前需要 12.6 小时，后提速 20%。问：提速后，北京到 G 城的特别快车要用多少小时？

（3）放学后兄弟二人都要从学校去奶奶家，弟弟先行 5 分钟，哥哥出发后 25 分钟追上了弟弟。如果哥哥每分钟多行 15 米，那么出发后 20 分钟可以追上弟弟。请问弟弟每分钟行多少米？

分析

（1）因为 $v_1 : v_2=4 : 5$，则 $t_1 : t_2=5 : 4$，根据题意 $t_1=5$，所以 $t_2=4$，因此是 12 点到达。

（2）根据题意提速前后速度比为 5∶6，由于路程不变，所以提速前后所用时间比为 6∶5。

（3）根据题意，哥哥提速前后，两人所走的路程相同，因此哥哥、弟弟的速度比和时间比成反比，所以哥哥提速前，哥哥与弟弟的速度比是 (25+5)∶25=6∶5=24∶20，哥哥提速后，哥哥与弟弟的速度比是 (20+5)∶20=5∶4=25∶20。

例 3 一辆汽车从甲地开往乙地，如果将车速提高 20%，可比原计划提前一小时到达；如果以原速行驶 200 千米，再将车速提高 25%，则可提前 12 分钟到达。由此可知，甲乙两地相距多少千米？

分析

由题意，设原来速度和车速提高了 20% 后的速度比为 5∶6，则所用时间比为 6∶5。设原计划用时 6 份，提速后用时 5 份，差的一份正好是 60 分钟，则原计划用时为 360 分钟。如果以原速行驶 200 千米，再将车速提高 25%，此时速度比为 4∶5，所用时间比为 5∶4，所以按原速度后面这段路程需要的时间为 12÷(5−4)×5=60（分），再用时间乘以速度即可。

例 4 从上海开车去南京，原计划中午 11：30 到达。但出发后车速提高了$\frac{1}{7}$，11 点钟就到了。第二天返回，同一时间从南京出发。按原速行驶了 120 千米后，再将车速提高$\frac{1}{6}$，到达上海时恰好 11：10。上海、南京两市之间的距离是多少千米？

分析

由题意设原来速度和车速提高了$\frac{1}{7}$后的速度比为 7∶8，则所用时间比为 8∶7，设原计划用时 8 份，提速后用时 7 份，差的一份正好是 30 分钟，则原计划用时为 240 分钟。返回时间缩短 20 分钟，是由于车速提高$\frac{1}{6}$，原速与返回提速后的速度比为 6∶7，则返回提速后这段路程内所用时间比为 7∶6。设这段路程原计划用时 7 份，提速后用时为 6 份，差的一份正好是 20 分钟，所以返回提速后用时 120 分钟，原计划用时 140 分钟，则原速行驶 120 千米用时 240−140=100（分）。

练习2

乘火车从甲城到乙城，2008 年初需要 19.5 小时，2008 年火车第一次提速 20%，2009 年第二次提速 25%，2010 年第三次提速 30%，经过这三次提速后，从甲城到乙城乘火车只需多少小时？

11.3 环形跑道上的变速问题

例 5 环形场地的周长为 1800 米，甲、乙两人同时从同一地点出发背向而行（甲速大于乙速），12 分钟后相遇。如果每人每分钟多走 25 米，则相遇点与前次相差 33 米，求原来二人的速度。

分析

甲、乙原来的速度和为 1800÷12=150（米/分），如果每人每分钟多走 25 米，现在的速度之和为 150+25×2=200（米/分），现在相遇需要的时间为 1800÷200=9（分）。甲比乙每分钟多走的路程前后均不变，看作 1 份；原来甲比乙多走的路程为 12 份，现在甲比乙多走的路程为 9 份。因为，前后相遇点相差 33 米；所以，甲现在比原来少走 33 米，乙现在比原来多走 33 米，甲的速度比乙的速度多 33×2÷(12−9)=22（米/分）。根据和差问题分别求出甲、乙的速度。

练习3

甲、乙两人沿 400 米环形跑道练习跑步，两人同时从跑道的同一地点向相反方向跑去。相遇后甲比原来速度增加 4 米/秒，乙比原来速度减少 4 米/秒，结果都用 25 秒同时回到原地。求甲原来的速度。

开放试题

每天中午有一艘轮船从哈佛开往纽约，且每天同一时刻也有一艘轮船从纽约开往哈佛。轮船在途中均要航行七天七夜。试问：某艘从哈佛开出的轮船在到达纽约前（包括到达纽约时）能遇上几艘从纽约开来的轮船？

笔记整理

（1）当时间相同即 $T_{甲}=T_{乙}$ 时，有 $S_{甲}:S_{乙}=V_{甲}:V_{乙}$；

（2）当速度相同即 $V_{甲}=V_{乙}$ 时，$S_{甲}:S_{乙}=T_{甲}:T_{乙}$；

（3）当路程相同即 $S_{甲}=S_{乙}$ 时，$V_{甲}:V_{乙}=T_{乙}:T_{甲}$；

（4）没有相同量时，例：

如果 $V_{甲}:V_{乙}=3:5$，$T_{甲}:T_{乙}=7:4$，那么 $S_{甲}:S_{乙}=(3\times7):(5\times4)=21:20$。

本讲巩固

1 甲、乙两地相距 6 千米，某人从甲地步行去乙地，前一半时间平均每分钟行 80 米，后一半时间平均每分钟行 70 米。问他走后一半路程用了多少分钟？

2 *A*,*B* 两地相距 6000 米，甲、乙两人分别从 *A*,*B* 两地同时出发相向而行，结果在距 *B* 地 2400 米处相遇。如果乙的速度提高到原来的 2.5 倍，那么两人可提前 9 分钟相遇，则甲的速度是每分钟行多少米？

3 如图 11-1 所示，甲、乙两车分别从 *A*,*B* 两地同时出发，相向而行一段时间后在 *C* 地相遇。出发时，甲、乙的速度之比是 5∶4，相遇后甲的速度减少 20%，乙的速度增加 20%。这样当甲到达 *B* 地时，乙离开 *A* 地还有 10 千米。请问 *A*,*B* 两地相距多少千米？



图 11-1

4 *A*,*B* 两地相距 7200 米，甲、乙分别从 *A*,*B* 两地同时出发，结果在距 *B* 地 2400 米处相遇。如果乙的速度提高到原来的 3 倍，那么两人可提前 10 分钟相遇，则甲的速度是每分钟多少米？

5 甲、乙两人沿 400 米环形跑道练习跑步，两人同时从跑道的同一地点向相反方向跑去。相遇后甲比原来速度增加了 2 米 / 秒，乙比原来速度减少了 2 米 / 秒，结果都用了 24 秒同时回到原地。求甲原来的速度。

第12讲

进位制进阶

前铺知识　进位制初步 ▶▶ 位值原理 ▶▶

本讲内容

1. 进制转换。
2. 进制的判断。
3. 构造进位制解决实际问题。

本讲故事

沙克汗和詹姆斯这对曾经的勇士兄弟见面了，而我们的小勇士们似乎也有很多的感受，关于勇敢，关于责任……





《易经》，又称《周易》，是中国儒家和道家共同的经典，分《经》《传》两部分。《周易》以高度抽象的六十四卦的形式象征普遍存在的双边关系中可能发生的各种各样的变化。它是中国传统思想文化中自然哲学与伦理实践的根源，对中国文化产生了巨大的影响，是古代汉族人民智慧和文化的结晶，被称为“群经之首，大道之源”。

智趣试题

皮卡丘是《口袋妖怪》中人气很高的精灵。另一种叫作百变怪的精灵很羡慕皮卡丘的人气，因此也将自己变成了皮卡丘的形象。现在有四群精灵，外貌都长得与皮卡丘相同，但实际上其中有几群全是百变怪，只有将它们捕捉带回研究所才能分辨是哪种精灵。请问应如何捕捉，才能一次分辨出这四个群体中哪一个是百变怪群体？

我们用二进制的思想解决这一问题。将 4 个群体分别编为 1 ～ 4 号，分别捕捉 1,2,4,8 只精灵，即取 $(1)_2,(10)_2,(100)_2,(1000)_2$。若实际有 n 只百变怪，只需观察 n 是由 1,2,4,8 中的哪些数字组成，即看 n 的二进制表示中哪几位为 1 即可。如 5 只百变怪，5=1+4，即 1 号群体和 4 号群体是百变怪群体。



12.1 进制转换

知识剖析

1. **进制的认识**

我们常用的进制为十进制，特点是“逢十进一，借一当十”。在实际生活中，除了十进制计数法外，还有其他的大于 1 的自然数进位制。比如二进制，八进制，十六进制等。

二进制：在计算机中，所采用的计数法是二进制，即“逢二进一”，因此二进制中只用两个数字 0 和 1。二进制的计数单位分别是 $2^0,2^1,2^2,2^3,\cdots$，二进制数也可以写成展开式的形式，例如 $(100110)_2$ 在二进制中表示为：

$(100110)_2=1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$。

二进制的运算法则是“满二进一，借一当二”。

n 进制：n 进制的运算法则是“逢 n 进一，借一当 n”，n 进制的四则混合运算和十进制一样，先乘除，后加减；同级运算，先左后右；有括号时先计算括号内的。

2. **进制间的转换**

进制间的转换，我们只研究整数之间的转换，如图 12-1 所示。

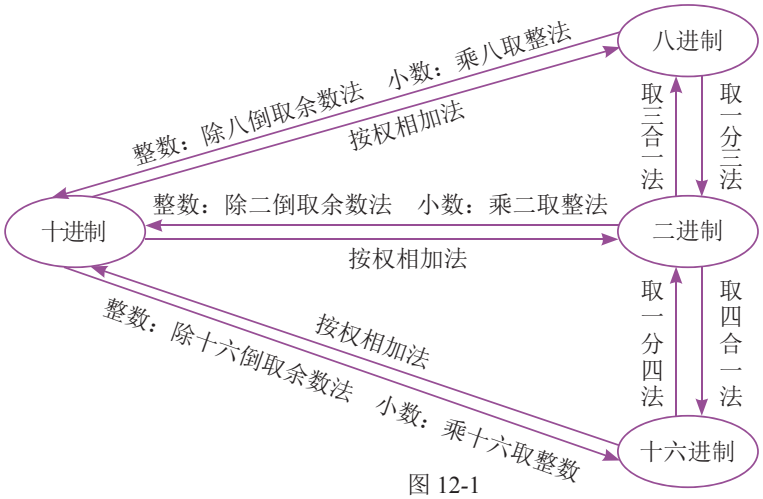


图 12-1

（1）十进制向其他进制转换。一个数从十进制向其他进制转换时，连续除以进制，每步写出余数，最后把余数倒写即可。

例如求 $(2011)_{10}=(\quad)_8$，如图 12-2 所示，用 2011 连续除以 8，则 $(2011)_{10}=(3733)_8$。

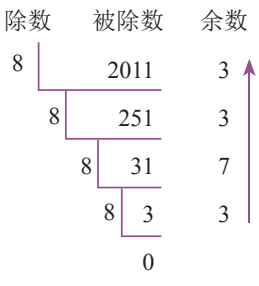


图 12-2

（2）其他进制向十进制转换。一个数从其他进制向十进制转换，按照位值原理拆开相加即可。

例如求 $(1234)_5=(\quad)_{10}$，

$(1234)_5=1\times5^3+2\times5^2+3\times5^1+4\times5^0=(194)_{10}$。

（3）二进制与八进制互相转换。二进制向八进制转换时，从个位开始取三位合成一位，缺位处用 0 填补，然后按位值原理分别转换，最后合并即可。

例如求 $(10101001111)_2=(\quad)_8$，

$(111)_2=7$，$(001)_2=1$，$(101)_2=5$，$(010)_2=2$，所以最后结果是 $(2517)_8$。

八进制向二进制转换时，则把每一位按照位值原理都分成三位，最后合并即可。

例如求 $(3561)_8=(\quad)_2$，

$3=(011)_2$，$5=(101)_2$，$6=(110)_2$，$1=(001)_2$，所以最后结果是 $(11101110001)_2$。

（4）二进制与十六进制互相转换。二进制向十六进制转换时，从个位开始取四位合成一位，缺位处用 0 填补，然后按位值原理分别转换，最后合并即可。

十六进制向二进制转换时，则把每一位按照位值原理都分成四位，最后合并即可。

例 1 （1）把 $(1110101)_2$ 改写成十进制数。

（2）把下列各数转化成十进制数：$(463)_8$；$(2BA)_{12}$；$(5FC)_{16}$。

分析

一个数从其他进制向十进制转换，按照位值原理拆开相加即可。

例 2 （1）将 $(42)_{10}$ 写成二进制数。

（2）把 9865 转化成五进制数和八进制数，看看谁是最细心的。

分析

用短除倒取余数。

例 3 计算：

（1）$(101101)_2+(10111)_2$；

（2）$(101101)_2-(10111)_2$；

（3）$(101101)_2\times(1011)_2$；

（4）$(10101011)_2\div(10011)_2$

分析

二进制的加、减、乘、除和十进制的计算法则一样。不同点在于十进制逢十进一，二进制逢二进一。

12.2 进制的判断

知识剖析

判断一个式子在何种进制下成立，一般有以下两个方法：

（1）数字特征。在 n 进制下，每个数字都不能大于 $(n-1)$，如在八进制下，每个数字都不能大于 7；反过来说，若 n 进制下出现 7 这个数字，则 n 必定大于 7，起码为八进制。

（2）尾数特征。观察这个式子的尾数在十进制下应运算出什么结果，再对比式子结果的尾数，找出进位进了多少，再推断进制。

如：等式 $34\times5=236$ 在什么进制下成立？

① 尾数 $4\times5=20$，而得数的尾数为 6，说明 $20-6=14$ 恰好是 1,7,14 的倍数。因此，进制应为 14 的因数；

② 式子出现了 6，因此进制必须大于 6，可能为 7 或 14，验算可知为七进制时等式成立。

例 4 （1）算式 $1534\times25=43214$ 是几进制数的乘法？

（2）哪种进制下，有 $135\times24=3636$ 成立？

分析

（1）注意到尾数，在足够大的进位制中有乘积的个位数字为 4×5=20，但是现在为 4，说明往前一位进了 20−4=16，所以进位制为 16 的因数，可能为 16,8,4 或 2。

因为原式中有数字 5，所以不可能为 4,2 进位，而在十进制中有 1534×25=38350＜43214，所以在原式中不到 10 就有进位，即进位制小于 10，于是原式为八进制。

（2）由于有 6，至少为七进制，由于结果比十进制看起来要大，所以一定少于十进制。分析个位，5×4−6=14，可见只能是七进制。

练习 1

算式 214×3=1050 在几进制下成立？

12.3 构造进位制解决实际问题

例 5 （1）小马虎有 10 箱钢珠，每个钢珠质量为 10 克，每箱 600 个。但这 10 箱钢珠中不小心混进了 1 箱次品，次品钢珠每个质量为 9 克，那么，要找出这箱次品最少要称几次？

（2）小马虎装了 10 箱零件，但他忽视了自己的马虎性格，混了几箱次品进去，已知每个零件质量为 10 克，次品比标准品轻 1 克，聪明的你能不能只称量一次就把所有的次品零件都找出来？（每箱的零件足够多）

（3）小马虎装零件又出错了！这次他虽然只装了 6 箱零件，却把次品和不及格品各混了几箱进去。已知标准零件质量为 10 克，每个次品比标准品重 1 克，不及格品比标准品轻 1 克。这次还能不能只称量一次就把装有次品和不及格品的箱子都分辨出来？

（4）小马虎怕再次出错，于是找来了朋友小迷糊帮忙，结果反而把零件搞得更乱了！这次 6 箱零件中混进了次品和不及格品。每个标准零件质量为 10 克，每个次品比标准品重 1 克，不及格品比标准品轻 0.5 克。小马虎想照搬上次的方法却失败了，请你再帮他想一个好方法将箱子分辨出来。

分析

（1）将 10 箱钢珠分别编为 1 ～ 10 号，然后从 1 号箱中取 1 个钢珠，从 2 号箱中取 2 个钢珠……，这样共取了 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55（个）钢珠，质量是 55×10=550（克），如果轻了 n（$1 \leqslant n \leqslant 10$）克，那么第 n 号箱就是次品。在这个方法中，第 10 号箱也可不取，这样共取出 45 个钢珠，如果重 450 克，那么 10 号箱是次品；否则，轻几克几号箱就是次品。总结：不同的进制数与十进制数的对应关系，即：每个十进制数都能表示成一个相应的二进制数，反之也是。

（2）我们用二进制的思想解决这一问题。将 10 箱钢珠分别编为 1 ～ 10 号，从 1 号箱中取 1 个钢珠，从 2 号箱中取 2 个钢珠，从 3 号箱中取 4 个钢珠，从 4 号箱中取 8 个钢珠，……，从 10 号箱中取 512 个钢珠，即每箱分别取 $(1)_2,(10)_2,(100)_2,(1000)_2,\cdots,(1000000000)_2$ 个钢珠。若全是标准品，质量和应为 $(1+2+3+\cdots+512)\times10=10230$（克）。实际质量比 10230 轻了 n 克，是因为有某几箱的每个零件都轻了 1 克。因此只需看 n 是由 1,2,4,8,16,…,512 中的哪些数字组成，即看 n 的二进制表示中哪几位为 1 即可。如实际质量和为 9956 克，$10230-9956=274=(0100010010)_2$（补上第 10 位的 0），即第 2,5,9 箱为次品。

（3）现在零件有三种品类，分别为标准品、次品和不及格品，因此我们可以构造三进制来区分这三种品类。每箱分别取零件 $(1)_3,(10)_3,(100)_3,\cdots,(100000)_3$，即 1,3,9,…,243 个。这次我们假设全是次品，那么质量和应为 $(1+3+9+\cdots+343)\times11=4004$（克）。实际质量比 4004 轻了 n 克，是因为有某几箱的每个零件轻了 1 克或 2 克。因此只需看 n 是由 1,3,9,…,243 中的哪些数字组成，即看 n 的三进制表示中哪几位为 1 或 2 即可。其中 1 表示比次品轻 1 克，即标准品；2 表示比次品轻 2 克，即不及格品。

如实际质量和为 3580 克，4004−3580=424=$(120201)_3$，即第 1,6 箱为标准品；第 2,4 箱为次品；第 3,5 箱为不及格品。

（4）题目中的 0.5 克不好处理。但我们可以假设每两个零件可以拼成一个大零件，那么题目可变为：每个次品比标准品重 2 克，每个不及格品比标准品轻 1 克。现在零件也有了三种品类，若将标准品质量看作 1，那么次品和不及格品质量分别为 3 和 0，由于有 3 的存在，因此我们需要构造四进制才可以区分这三种品类。

与上题类似，每箱分别取零件 $(1)_4,(10)_4,(100)_4,\cdots,(100000)_4$，即 1,4,16,…,1024 个，假设全是次品，质量和应为 (1+4+16+…+1024)×11=15015（克）。实际质量比 15015 轻了 n 克，是因为有某几箱的每个零件轻了 1 或 1.5 克。因此只需看 $2n$ 是由 1,4,16,…,1024 的那些数字组成，即看 $2n$ 的四进制表示中哪几位为 2 或 3 即可。其中 2 表示每两个零件比次品轻 2 克，即标准品；3 表示每两个零件比次品轻 3 克，即不及格品。

如实际质量和为 13198 克，15015−13198=1817，1817×2=3634=$(320302)_4$，即第 1,5 箱为标准品，第 2,4 箱为次品，第 3,6 箱为不及格品。

开放试题

把所有 3 的次方及互不相等的 3 的次方的和排列成一个递增数列：1,3,4,9,10,12,13,…，求这个数列的第 100 项。

笔记整理

1. 进制的认识
2. 进制间的转化
3. 进制的判断

本讲巩固

1 把 $(11101)_2$ 改写成十进制数。

2 将 $(2013)_{10}$ 写成二进制数。

3 在八进制中，1234−456−322=_____；
在九进制中，14438+3123−7120−11770+5766=_____。

4 在几进制中有 4×13=100？

5 茶叶店老板要求员工提高服务质量，开展“零等待”活动，当顾客要买茶叶的时候，能最快满足顾客的需求者为优秀。结果有一个员工总是第一名，而且顾客到他那儿从不需要等待。原来他把茶叶先称出若干包来，放在柜台上，顾客告诉他重量，他就拿出相应重量的茶叶。别的伙计看在眼里，立即学习，可是柜台上却放不下太多包。奇怪的是，最佳员工的柜台上的茶叶包裹却不是很多。于是有员工去取经，发现最佳员工准备的茶叶数量是 1,2,4,8,16,32,64,128,256。你能解释一下其中的道理么？这些重量可以应付的顾客需要的最高重量是多少？

第13讲 应用题综合

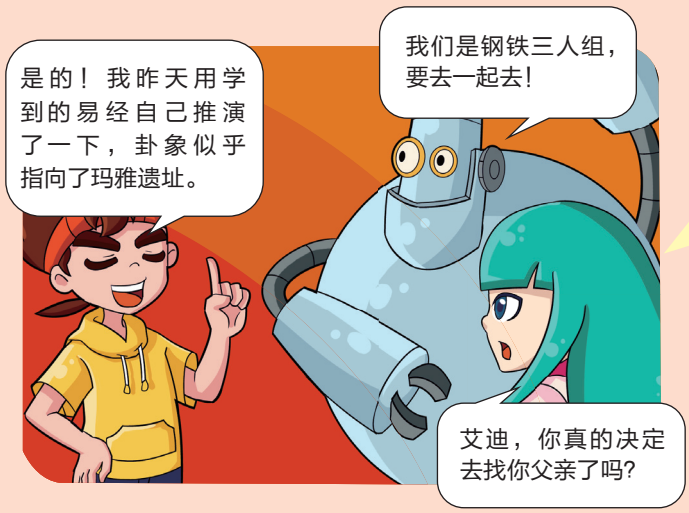
前铺知识 浓度问题 ▶▶ 经济问题 ▶▶

本讲内容

1. 牛吃草问题综合。
2. 经济问题综合。
3. 浓度问题综合。
4. 工程问题综合。

本讲故事

大家知道了进位制和易经，而卦象似乎指向了艾迪的父亲……



玛雅文明

玛雅文明是美洲大陆上诞生的最伟大的文明，主要分布在墨西哥、危地马拉和洪都拉斯等地。它在科学、农业、文化、艺术等诸多方面所取得的成就，即使在今天看起来也是十分伟大和不可思议的。但是，让人们百思不得其解的是，作为世界上唯一一个诞生于热带丛林而不是大河流域的古代文明，玛雅文明的衰亡和消失与它奇迹般的崛起和发展一样，充满了神秘色彩。

智趣试题

传说印度数学家花拉子密在他太太怀第一胎时，写了一份遗嘱，内容如下：如果我亲爱的妻子帮我生个儿子，我的儿子将继承三分之二的遗产，我的妻子将得三分之一；如果生女儿，我的妻子将继承三分之二的遗产，我的女儿将得三分之一。但在孩子出生前，花拉子密不幸去世了，留下了 168 两黄金的遗产。而老天作弄人，他的妻子竟然生下了一对双胞胎，是一男一女。聪明的你，请帮他们依照符合花拉子密遗愿的方式公平地分配这笔遗产吧！请问儿子可分得多少两黄金？

儿子和母亲分得的遗产之比是 $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=2:1$，

母亲和女儿分得的遗产之比是 $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=2:1$，

儿子、母亲和女儿分得遗产之比是 $(2\times2):(1\times2):1=4:2:1$，

儿子可以得到 $168\times\frac{4}{1+2+4}=96$（两）黄金。



13.1 牛吃草综合

例 1 有一块草地，现有的草共有 x 份，假设每天草地都能均匀生长出 y 份新草，每头羊每天吃 1 份草，这块草地经过测算可供 100 只羊吃 200 天，或供 150 只羊吃 100 天。问：

（1）x 和 y 各为多少？

（2）如果放牧 250 只羊，可以吃多少天？

（3）草吃完了，草地就会沙化，无法继续放牧，为了防止草地沙化，这块草地最多可以放牧多少只羊？

分析

根据“原草量 + 天数 × 每天吃的草量 = 牛的头数 × 天数”的等量关系，可求出“原草量”和“每天新生长的草量”，然后再求出所求的量。

练习 1

把一片均匀生长的大草地分成三块，面积分别为 5 公顷、15 公顷和 24 公顷。如果第一块草地可以供 10 头牛吃 30 天，第二块草地可以供 28 头牛吃 45 天，那么第三块草地可以供多少头牛吃 80 天？

13.2 经济问题综合

例 2 张先生向商店订购某一商品，共订购 60 件，每件定价 100 元。张先生对博士说：“如果你肯降价，每件商品每降价 1 元，我就多订购 3 件。”博士算了一下，如果降价 4%，由于张先生会多订购，仍可获得跟原来一样多的总利润。问这种商品的成本是多少元？

分析

根据“单价 × 数量 = 总金额”“售价 − 成本 = 利润”的等量关系列方程。

例 3 某市为了鼓励居民节约用水，采用分段计费的方法按月计算每户家庭的水费，月用水量不超过 10 吨时，按 3 元 / 吨计费；月用水量超过 10 吨时，其中的 10 吨仍按 3 元 / 吨计费，超过部分则按 3.5 元 / 吨计费。

（1）10 月份小丽家用水 8 吨，应交水费多少元？

（2）11 月份小丽家实交水费 35.25 元，这个月小丽家用水多少吨？

分析

根据“水费 =10 吨 ×3 元 / 吨 + 超过的吨数 ×3.5 吨 / 元”等量关系列方程。

练习2

自来水公司为鼓励居民节约用水，规定每月用水不超过 2 立方米时，按每立方米 0.5 元计费；超过 2 立方米的部分按每立方米 2 元计费。王红上月共交水费 13 元，请你算一算她家上月用水多少立方米？

13.3 浓度问题综合

例 4 瓶中装有浓度为 15% 的酒精溶液 1000 克，现在又分别倒入 100 克和 400 克的两种酒精溶液 A 和 B，瓶里的酒精溶液浓度变成了 14%。已知 A 种酒精溶液浓度是 B 种酒精溶液浓度的 2 倍，那么，A 种酒精溶液的浓度是_____%。

分析

根据“溶液 × 浓度 = 溶质”“*A* 溶液的溶质 +*B* 溶液的溶质 +1000 克溶液的溶质 = 总共溶液的溶质”的等量关系列方程。

13.4 工程问题综合

例 5 如图 13-1 所示，有一个敞口的立方体水箱，在其同一侧面一条高的三等分处开两个排水孔 *A* 和 *B*，已知两孔的排水速度相同且保持不变，现在从水箱上面匀速注水，如果打开 *A* 孔，关闭 *B* 孔，那么经过 20 分钟可将水箱注满，如果关闭 *A* 孔，打开 *B* 孔，则需要 22 分钟才能将水箱注满，那么两孔都打开，经过_____分钟才能将水箱注满。

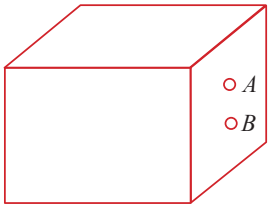


图 13-1

分析

根据“工作总量 ÷ 工作效率 = 工作时间”的等量关系列方程组。本题需要注意侧高的不同位置上的两个排水孔起作用的阶段不同，只有当水位上升到其高度后排水孔才开始排水，在此之前则是不排水的。

开放试题

在一个奇怪的动物村庄里住着猫、狗和其他一些动物。有 20% 的狗认为它们是猫，有 20% 的猫认为它们是狗，其他的动物都是正常的。一天，动物村的村长小猴子发现：所有的猫和狗中，有 32% 认为自己是猫。如果这个奇怪的动物村庄里狗比猫多 180 只，那么狗的数目是多少只？

笔记整理

1. 牛吃草问题

算术方法中重要的两步：①求草的生长速度；②求草的原有草量。

解方程法是分别设草的生长速度和原有草量为两个未知数，根据吃的总草量列方程组。

2. 经济问题

经济问题主要相关公式：

$$\text{售价}=\text{成本}+\text{利润}，\text{利润率}=\frac{\text{利润}}{\text{成本}}\times 100\%=\frac{\text{售价}-\text{成本}}{\text{成本}}\times 100\%；$$

$$\text{售价}=\text{标价}\times\text{折扣}。$$

3. 浓度问题

浓度问题相关公式：

$$\text{溶液}=\text{溶质}+\text{溶剂}，\text{浓度}=\frac{\text{溶质}}{\text{溶液}}\times 100\%=\frac{\text{溶质}}{\text{溶质}+\text{溶剂}}\times 100\%。$$

常用方法：

（1）十字交叉法（甲溶液浓度大于乙溶液浓度）。

形象表达：$\dfrac{\text{甲溶液质量}}{\text{乙溶液质量}}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{B}{A}=\dfrac{\text{甲溶液与混合溶液的浓度差}}{\text{混合溶液与乙溶液的浓度差}}$

（2）列方程解应用题也是解决浓度问题的重要方法。

4. 工程问题

工程问题，究其本质是运用分数应用题的量率对应关系，即用对应分率表示工作总量与工作效率，这种方法可以称作是一种“工程习惯”，这一类问题称之为“工程问题”。

（1）解题关键是把“一项工程”看成一个单位，运用公式：工作效率 × 工作时间 = 工作总量，表示出各个工程队（人员）或其组合在统一标准和单位下的工作效率。

（2）利用常见的数学思想方法，如代换法、比例法、列表法、方程法等。抛开“工作总量”，和“时间”，抓住题目给出的工作效率之间的数量关系，转化出与所求相关的工作效率，最后利用先前的假设“把整个工程看成一个单位”，求得问题答案，一般情况下，工程问题求的是时间。

本讲巩固

1 有一片牧场，草每天都在均匀地生长。如果在牧场上放养 24 头牛，那么 6 天就把草吃完了；如果只放养 21 头牛，那么 8 天才能把草吃完。请问：

（1）要使得草永远吃不完，最多可以放养多少头牛？

（2）如果放养 36 头牛，多少天可以把草吃完？

2 某旅游团体准备订购定价为 100 元的某种纪念章 80 枚。团体负责人对商店经理说：“如果你肯降价，那么每降价 1 元，我就多订购 4 枚。”商店经理算了一下，若降价 5%，由于旅游团体会多订购，获得的利润反而比原来多 100 元，这种纪念章的成本是多少元？

3 某自来水公司对水费的计算办法：每户每月用水不超过 5 吨，每吨收费 0.85 元；若超过 5 吨，则超出的部分每吨的收费标准另行规定。已知今年 7 月份张家用水量和李家用水量的比是 2∶3，其中张家当月水费是 14.60 元，李家当月的水费是 22.65 元。问超出 5 吨部分的收费标准是每吨多少元？

4 （1）在浓度为 40% 的酒精溶液中加入 5 千克水，浓度变为 30%， 再加入多少千克纯酒精，浓度才能变成 50% ？

（2）A,B,C 三瓶盐水的浓度分别为 20%、18%、16%，它们混合后得到 100 克浓度为 18.8% 的盐水。如果 B 瓶盐水比 C 瓶盐水多 30 克，那么 A 瓶盐水有多少克？

5 一个没有盖的水箱，在其侧面 $\frac{1}{3}$ 高和 $\frac{2}{3}$ 高的位置各有一个排水孔，它们排水时的速度相同且保持不变。现在以一定的速度从上面给水箱注水。如果打开 A 关闭 B，那么 35 分钟可将水箱注满；如果关闭 A 打开 B，那么 40 分钟可将水箱注满。如果两个孔都打开，那么需要多少分钟才能将水箱注满？

第14讲

抽屉原理进阶

前铺知识　抽屉原理初步 ▶▶ 最值问题综合 ▶▶

本讲内容

1. 基本抽屉原理和最不利原则。
2. 构造抽屉解决数论问题。
3. 构造抽屉解决其他问题。

本讲故事

小勇士们决定靠自己的能力找到事情的真相，这一次，也许就是成长的蜕变……



四大文明古国，是国际上对世界四大古代文明的概称，分别是古埃及、古巴比伦、古印度和中国。埃及和中国我们已经十分熟悉了。古印度文明最早在印度河流域兴起，以其异常丰富、玄奥和神奇的文化深深地吸引着世人，印度人创作了精美的绘画和雕塑，还有世界上最长的史诗。古巴比伦文明发源于幼发拉底河和底格里斯河流域，古巴比伦人颁布了第一部法典——汉谟拉比法典，还创造了楔形文字。巴比伦城富丽堂皇，城中有举世闻名的空中花园和巴别塔。

14.1 基本抽屉原理和最不利原则

例 1

回顾学过的抽屉原理，求解下面的题目：

（1）把 21 个苹果放在 20 个抽屉里，苹果最多的抽屉里至少有 _____ 个苹果。

（2）有 20 个抽屉，保证苹果最多的抽屉里至少有 3 个苹果，则总苹果数最少有 _____ 个。

（3）把 100 个苹果放进若干个抽屉里，保证苹果最多的抽屉里至少有 4 个苹果，则抽屉最多有 _____ 个。

分析

分清楚什么是苹果、什么是抽屉，用苹果数除以抽屉数，如果没有余数，商就是苹果最多的抽屉里至少应有的苹果数；如果有余数，商加 1 就是苹果最多的抽屉里至少应有的苹果数。

例 2

试说明 400 人中至少有两个人的生日相同。

分析

分清什么是苹果数，什么是抽屉数。题中 400 人就相当于苹果数，一年的天数相当于抽屉数。

练习 1

五年级数学小组共有 20 名同学，这 20 名同学每人在数学小组中都有一些朋友，请你证明：至少有两名同学，他们的朋友人数一样多。

练习 2

新年晚会上，老师让每位同学从一个装有许多玻璃球的口袋中摸出两个球，这些球给人的手感相同，只有红、黄、白、蓝、绿五色之分（摸时看不到颜色），结果发现总有两人取的球相同，由此可知，参加取球的至少有多少人？

14.2 构造抽屉解决数论问题

例 3 （1）从 1,4,7,10,…,37,40 这 14 个数中任取 8 个数，试证：其中至少有 2 个数的和是 41。

（2）从 1,2,3,…,21 这些自然数中，至少取出多少个数，能保证存在两个数的差等于 4？

分析

构造出和是 41 与差是 4 的抽屉数，然后给定的苹果数一定大于构造的抽屉数就可以证明它的存在性。

练习3

从 1 ～ 36 中，最多可以取出_____个数，使得这些数中没有两数的差是 5。

例 4 求证：对于任意的 8 个自然数，一定能从中找到 6 个数 a,b,c,d,e,f，使得 $(a-b)(c-d)(e-f)$ 是 105 的倍数。

分析

$105=3\times5\times7$，对于任意的 8 个自然数，必可选出 2 个数，使它们的差是 7 的倍数；在剩下的 6 个数中，又可选出 2 个数，使它们的差是 5 的倍数；在剩下的 4 个数中，又可选出 2 个数，使它们的差是 3 的倍数。

14.3 构造抽屉解决其他问题

例 5 （1）用红、蓝两种颜色给一个 2×5 的方格图中的小方格随意涂色（如图 14-1 所示），每个小方格涂一种颜色。请问是否存在两列，它们的小方格中涂的颜色完全相同？

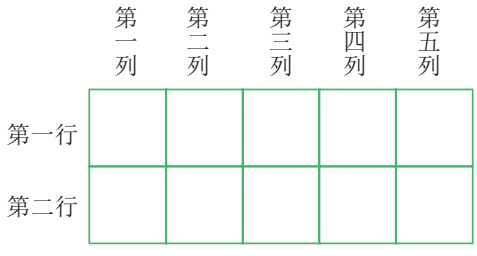


图 14-1

分析

用红、蓝两种颜色涂色可能的情形来构造抽屉，只要列数比构造的抽屉数多就可以证明这样两列的存在性。

（2）如图 14-2 所示，将每一个小方格涂上红色、黄色或蓝色（每一列的三小格涂的颜色不相同），证明：不论如何涂色，其中至少有两列，它们的涂色方式相同。

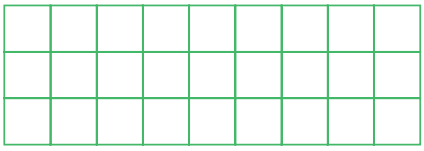


图 14-2

分析

用红、黄、蓝三种颜色涂色构造抽屉，只要列数比构造的抽屉数多就可以证明它的存在性。

练习 4

在 8×8 的方格纸中，每个方格内可以填上 1 ～ 4 这四个自然数中的任意一个，填满以后，对每个 2×2 田字格内的四个自然数求和。在这些和中，相同的和至少有 _____ 个。

开放试题

证明：在任意六个人的集会上，或者有三个人以前彼此相识，或者有三个人以前彼此不相识。

笔记整理

1. 认识抽屉原理

抽屉原理也被称为鸽笼原理或鞋盒原理，它是由德国数学家狄利克雷首先明确地提出来并用以证明一些数论中的问题，因此也被称为狄利克雷原则。抽屉原理是组合数学中一个重要而又基本的数学原理，利用它可以解决很多有趣的问题，并且常常能够起到令人惊奇的作用。

2. 抽屉原理的两种表现形式

抽屉原理一：

将多于 n 件的物品任意放到 n 个抽屉中，那么至少有一个抽屉中的物品不少于 2 件。

抽屉原理二：

将多于 mn 件的物品任意放到 n 个抽屉中，那么至少有一个抽屉中的物品不少于 $m+1$ 件。

3. 抽屉原理解题步骤

“抽屉”很明确：分清什么是“苹果”，什么是“抽屉”，什么是“抽屉里的苹果”。

“抽屉”不明确：关键是分析题意合理构造抽屉，然后运用抽屉原理，使问题得到解决。

4. 数论中构造的常见抽屉

（1）和或差是固定值时，按照和或差构造抽屉。

（2）把所有整数按照除以某个自然数 n 的余数分为 n 类，叫作模 n 的剩余类。在研究与整除有关的问题时，常用剩余类作为抽屉。根据抽屉原理，可以证明：任意 $n+1$ 个自然数中，总有两个自然数的差是 n 的倍数。

（3）比值范围一定时，按照比值构造区间抽屉。

本讲巩固

1 有红、黄、蓝、绿四种颜色小旗各一面，取其中一面小旗，或多面小旗由上而下挂在旗杆上作为信号（挂多面小旗时，不同顺序表示不同信号，每面小旗颜色不相同）。问：

（1）共有 _____ 种不同的信号。

（2）如果某天共发出 323 次信号，那么这一天必定出现某种相同的信号至少有 _____ 次。

2 （1）从 2,4,6,…,30 这 15 个偶数中，任取 9 个数，证明其中一定有 2 个数之和是 34。

（2）从 1,2,3,…,100 这 100 个数中任意挑出 51 个数来，证明在这 51 个数中，一定有 2 个数的差为 50。

3 证明：任取 6 个自然数，必有 2 个数的差是 5 的倍数。

4 任给六个数字，一定可以通过加、减、乘、除、括号，将这六个数组成一个算式，使其得数为 105 的倍数。

5 用数字 1,2,3,4,5,6 填满一个 6×6 的方格表，如图 14-3 所示，每个小方格只填其中的一个数字。将每个 2×2 正方格内的四个数字的和称为这个 2×2 正方格的“标示数”。问能否给出一种填法，使任意两个“标示数”均不相同？如果能，请举出一例；如果不能，请说明理由。

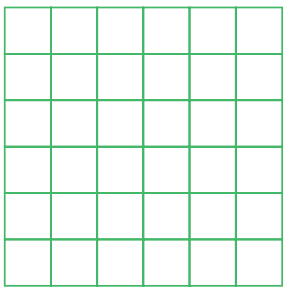


图 14-3

答案与提示

第 1 讲　数形结合

1.1　计算中的数形结合

例 1

（1）将图 1-1（a）中所有 1 相加即是 1+2+3+…+n，将图 1-1（a）旋转 180 度后得图 1-1（b），两图合起来看发现每行都有 n+1 个 1，恰有 n 行，因此得到 $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$。

（2）即为 $1+3+5+\cdots+(2n-1)$，按每行求和再相加得 n^2，所以有 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$。

例 2

（1）每张图表上有 $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ 个数；

（2）三张图表相同位置处的三个数之和为 $(2n+1)$；

（3）三张图表上的数总和为 $\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$；

（4）$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。

例 3

第二组被连线的数的和分别为 $(1+2+3+4)\times 2$，$2+4+2=(1+2+1)\times 2=2^3$；

第三组被连线的数的和分别为 $(1+2+3+4)\times 3$，$3+6+9+6+3=(1+2+3+2+1)\times 3=3^3$；

第四组被连线的数的和分别为 $(1+2+3+4)\times 4$，$4+8+12+16+12+8+4=4^3$。

综上可知，图 1-4（a）中所有数之和为 $(1+2+3+4)\times(1+2+3+4)=(1+2+3+4)^2=10^2$，图 1-4（b）中所有数之和为 $1^3+2^3+3^3+4^3$。

可以推断：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$。

练习 1

原式 $=4\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$

$=4\times\frac{1}{6}\times 10\times 11\times 21$

$=1540$

练习 2

原式 $=(1^2+2^2+3^2+\cdots+19^2)-(2^2+4^2+\cdots+18^2)$

$=\frac{1}{6}\times 19\times 20\times 39-4\times(1^2+2^2+\cdots+9^2)$

$=2470-4\times\frac{1}{6}\times 9\times 10\times 19$

$=2470-1140$

$=1330$

1.2　用图形表示数

例 4

（1）阴影部分的面积为 a^2-b^2，大长方形的长和宽分别为 $a+b$ 和 $a-b$，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。

（2）面积分别为 a^2,b^2,ab,ab，$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。

（3）$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$，

$(a+b+c)(x+y+z)=ax+ay+az+bx+by+bz+cx+cy+cz$。

练习 3

原式 $=2007^2-2006^2+\cdots+5^2-4^2+3^2-2^2+1^2$

$=(2007-2006)\times(2007+2006)+(2005-2004)\times(2005+2004)+\cdots+(3-2)\times(3+2)+1$

$=2007+2006+2005+2004+\cdots+3+2+1$

$=\frac{1}{2}\times(2007+1)\times 2007=2015028$

1.3　其他数形结合问题

例 5

（1）设批发价为 x 元（图 1-8 中长方形 B 的宽），因此按批发价买了 $(2x+4)$ 本，则有 $x(2x+4)=48$，$x(x+2)=24=4\times 6$，所以 $x=4$，零售价为 $x+2=6$（元）。

（2）设甲、乙两人的预定速度和为每小时 V 千米，在预定速度下的相遇时间为 t，由于三次所走的总路程相同，根据长方形图法可知三个不同线型的长方形面积相同，列方程组得 $\begin{cases}(t+2)(V-3)=tV,\\(t-1)(V+2)=tV,\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}3t=2(V-3),\\2(t-1)=V,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}t=10,\\V=18,\end{cases}$ 所以 A,B 两地的距离为 $18\times 10=180$（千米）。

开放试题

8 人排队相当于把 8 个人填入如图 1 所示的两列方格中，当 A 的位置确定时，第二列最多可以确定一

个位置 D，当确定 A,B 两个位置时，第二列最多可以确定 C,D 两个位置，因此第二列确定的位置个数永远不会多于第一列确定的位置个数，因此我们用横线代表第一列确定的位置，用竖线代表第二列确定的位置。画图如图 2 所示。因此两列纵队有 14 种不同排法。

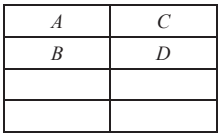


图 1

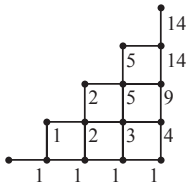


图 2

本讲巩固

1．（1）原式中的加数共有 (99−1)÷2+1=50（项），
原式 =50×50=2500。
（2）原式中的加数共有 (217−1)÷9+1=25（项），
原式 =(217+1)×25÷2=2725。

2. 同平方和公式的推导，用踢三角法（如图 3 所示）：

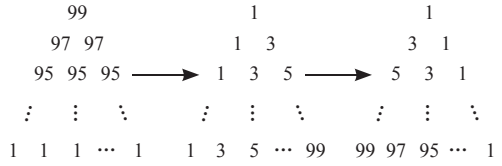


图 3

叠加三个三角，每个位置的数字和都是 101，
原式 =101×(1+2+3+…+50)÷3=42925。

3．（1）原式 $=1^2+2^2+3^2+\cdots+30^2-(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)$
$=9400$
（2）原式 $=(1+2+3+\cdots+100)^2-(1+2+3+\cdots+9)^2$
$=5050^2-45^2=25500475$

4．会得到 3×4=12（个）积，将 A,B 组中每个数看成图 4 中每个小长方形的长和宽，求所有积的和，即为求图 4 中所有小长方形面积的和，也就是大长方形的面积，因此所有积的和为 (6+9+15+20)×(32+43+25)=5000。

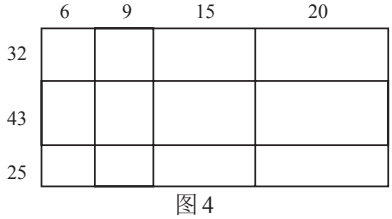


图 4

5．如图 5 所示，长方形的长代表船的数量，宽代表每条船坐的人数，$S_1=S_2=2\times6=12$，即每条船坐 9 人需要 12÷(9−6)=4（条）船，所以全班共有 9×4=36（人）。

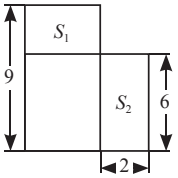


图 5

第 2 讲　圆柱与圆锥

2.1　圆柱的基本公式

例 1

（1）460×3=1380（立方厘米）；
（2）圆柱的体积：$V=S_{底}h=\pi r^2h$。

例 2

（1）底面半径为 10÷2=5（厘米），
底面积为 $3.14\times5^2=78.5$（平方厘米），
圆柱体积为 78.5×8=628（立方厘米），
表面积为 78.5×2+3.14×10×8=408.2（平方厘米）。
（2）底面半径为 628÷10÷3.14÷2=10（厘米），
底面积为 $3.14\times10^2=314$（平方厘米），
体积为 314×10=3140（立方厘米），
表面积为 $3.14\times10^2\times2+628=1256$（平方厘米）。
（3）$3.14\times r^2\times3=84.78$（立方分米），$r=3$（分米），
表面积增加了 3.14×(3×2)×3=56.52（平方分米）。
（4）根据题意圆柱的底面半径为 50.24÷2÷2÷3.14=4（厘米），体积减少了 $3.14\times4^2\times2$ =100.48（立方厘米）。

例 3

上下底面积和为 $2\times3.14\times1.5^2=14.13$（平方米），
侧面积为 2×3.14×(0.5+1+1.5)×1=18.84（平方米），
所以该物体的表面积是 14.13+18.84=32.97（平方米）。

2.2　圆锥基本公式

例 4

（1）底面面积（底面半径）和高。

（2）$V=\frac{1}{3}S_{底}h=\frac{1}{3}\pi r^2h$。

（3）$V_{圆柱}=\pi r^2h=502.4$（立方厘米），

$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{2512}{15}$（立方厘米）。

练习 1

（1）两个圆锥的体积分别为 25.12 立方厘米和 7.065 立方厘米。

（2）圆锥的体积为 $3.14\times4\times4\times9\div3=150.72$（升），时间为 $150.72\div8=18.84$（时）。

2.3 圆柱与圆锥综合

例 5

（1）A 中水的体积为 $\frac{1}{3}\times\pi\times6^2\times10=120\pi$（立方厘米），因此 B 中水的高度为 $120\pi\div(\pi\times5^2)=4.8$（厘米）。

（2）酒的体积：$15\pi\times\frac{10}{2}\times\frac{10}{2}=375\pi$

瓶中剩余空间的体积：

$(30-25)\pi\times\frac{10}{2}\times\frac{10}{2}=125\pi$

酒瓶容积：$375\pi+125\pi=500\pi=1500$（毫升）

练习 2

假设瓶颈的高为 x，则 $\frac{x}{3}+6=10+x-8$。解得 $x=6$。

瓶子的体积相当于高为 12 厘米的圆柱体，所以体积为 $\pi\times5^2\times12=942$（立方厘米）。

开放试题

扫出的图形如图 2-9（b）所示，白色部分实际上是一个圆柱减去两个圆锥后所形成的图形。

两个圆锥的体积之和为 $2\times\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times5=30\pi=90$（立方厘米），

圆柱的体积为 $\pi\times3^2\times10=270$（立方厘米），

所以白色部分扫出的体积为 $270-90=180$（立方厘米）。

本讲巩固

1．方法一：这两个侧面都是长方形，且长等于原来圆柱体的高，宽等于圆柱体底面半径。

根据题意可知，圆柱体的高为 $50.24\div(3.14\times2^2)=4$（厘米），所以增加的表面积为 $2\times4\times2=16$（平方厘米）。

方法二：根据长方体的体积公式推导。增加的两个面是长方体的侧面，侧面面积与长方体的长的乘积就是长方体的体积。由于长方体的体积与圆柱体的体积相等，是 50.24 立方厘米，而拼成的长方体的长等于圆柱体底面周长的一半，为 $3.14\times2=6.28$（厘米），所以侧面长方形的面积为 $50.24\div6.28=8$（平方厘米），所以增加的表面积为 $8\times2=16$（平方厘米）。

2．涂漆的面积等于大圆柱表面积与小圆柱侧面积之和：

$6\pi\times10+\pi\times\left(\frac{6}{2}\right)^2\times2+4\pi\times5=98\pi=307.72$（平方厘米）。

3．沿水平方向锯掉 4 厘米后，剩下的圆柱体比原来的圆柱体所减少的表面积为减掉的 4 厘米圆柱体的侧面积，所以原来圆柱体的底面周长为 $12.56\div4=3.14$（厘米），底面半径 $3.14\div3.14\div2=0.5$（厘米），即原来的圆柱体的体积是 $\pi\times0.5^2\times10=2.5\pi=7.85$（立方厘米）。

4.

$$\frac{\text{圆锥体积}}{\text{圆柱体积}}=\frac{\frac{1}{3}\pi\times2^2\times4}{\pi\times4^2\times8}=\frac{1}{24}$$

5. 由已知条件可得，图 2-13（b）上部空白部分的高为 $7-5=2$（厘米），从而水与空着的部分的比为 $4:2=2:1$，由图 2-13（a）可知水的体积为 $10\times4=40$（立方厘米），所以瓶子的容积为 $40+10\times2=60$（立方厘米）。

第 3 讲 复合图形分拆

3.1 辅助线的技巧

例 1

（1）解：设这个长度为 x，以总面积为等量关系可列出方程：$\frac{3x}{2}+\frac{4x}{2}+\frac{5x}{2}=\frac{3\times4}{2}$，化简为 $(3+4+5)x=12$，解得 $x=1$。

（2）四边形的面积：$32\times8\div2=128$（平方厘米）

练习 1

如图 6 所示，连接 BO,FO,EO，$\triangle ABO$, $\triangle BOC$, $\triangle AOC$ 三个面积和是 $\triangle ABC$ 的面积。点 O 到三边的距离相等，设这个长度为 x，以总面积为等量关系可列出方程：

$$\frac{ABx}{2}+\frac{BCx}{2}+\frac{ACx}{2}=30$$

$$\frac{(AB+BC+AC)x}{2}=30$$

$\frac{15x}{2}=30$

$x=4$

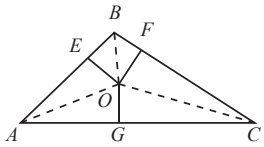


图 6

例 2

阴影部分是大正方形的 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$，所以边长为 a 的正方形面积是阴影部分面积的 16 倍。

练习 2

三角形 EFG 的面积：$40\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=5$（平方厘米）

3.2 常见几何面积模型复习

例 3

（1）三角形 DEF 的面积等于正方形 $ABCD$ 的面积减去三个三角形的面积，即三角形 AED、三角形 DFC、三角形 BEF 的面积，即

$S_{\triangle DEF}=6\times6-1.5\times6\div2-2\times6\div2-4.5\times4\div2=16.5$，所以长方形 $EFGH$ 面积为 $16.5\times2=33$。

（2）$S_{四边形BFDE}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$，$S_{四边形ABCD}=2\times6=12$。

（3）$S_{阴影}=12\div4\times1=3$（平方厘米）。

练习 3

如图 7 所示，连接 EH,EF,FG,GH，由题可知各线段长度。所求四边形的面积可以化为三角形 FGP 与 FCG 的面积和。易见中间的四边形 $EFGH$ 是平行四边形。根据一半模型可知，

$S_{\triangle EHP}+S_{\triangle FGP}=\frac{1}{2}S_{平行四边形EFGH}$。

$S_{平行四边形EFGH}=4\times6-2\times3\div2\times2-1\times4\div2\times2=14$（平方厘米），

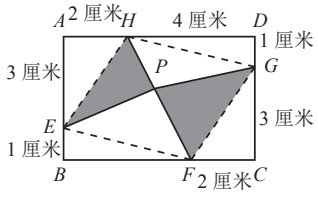


图 7

那么 $S_{\triangle EHP}+S_{\triangle FGP}=14\div2=7$（平方厘米），$S_{\triangle EHP}=5-3=2$（平方厘米），所以 $S_{\triangle FGP}=7-2=5$（平方厘米）。因此四边形 $PFCG$ 的面积是 $5+2\times3\div2=8$（平方厘米）。

练习 4

如图 8 所示，连接 DE，根据题意可知 $BE:AD=1:2$，根据蝴蝶模型得 $S_{梯形}=(1+2)^2=9$（平方厘米），$S_{\triangle ECD}=3$（平方厘米），那么 $S_{正方形ABCD}=12$（平方厘米）。

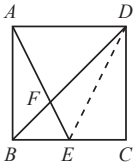


图 8

3.3 复合图形分拆方法

例 4

设最小的等腰直角三角形的面积为 1 份，则两个正方形的面积一个为 16 份，一个为 18 份，那么较大的正方形面积为 $12\times12\div16\times18=162$（平方厘米）。

例 5

设 $S_{\triangle ABC}=1$ 份，$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle AED}+S_{四边形ABFE}-S_{\triangle BDF}=2+(12-1)-6=7$（份），因此三角形 DEF 的面积是 7。

练习 5

如图 9 所示，将长方形分割成 7 个相同的小菱形和 10 个三角形，10 个三角形又可以拼成 5 个同样的小菱形，所以阴影部分的面积占长方形 $ABCD$ 的面积比为 $\frac{1}{12}$。

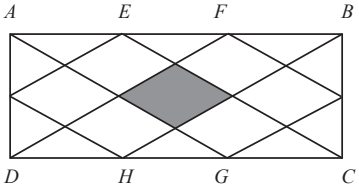


图 9

开放试题

答案略

本讲巩固

1. 如图 10 所示，$AB=AC=BC=6\div3=2$ 分别连接 PA,PB,PC，$\triangle ABC$ 的面积为 $2\times(PD+PE+PF)\div2=a$，所以 $PD+PE+PF=a$。

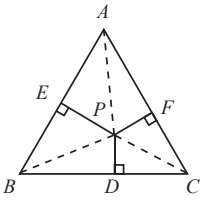


图 10

2．如图 11 所示添加辅助线，则所求四边形的面积＝大等腰直角三角形－小等腰直角三角形，因此所求四边形的面积为 7×7÷2−3×3÷2=20。

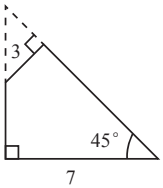


图 11

3．如图 12 所示，连接 DF, CF，因为 $S_{\triangle DHG}=S_{\triangle DHF}=S_{\triangle BHC}$，所以 $S_{阴影}=S_{\triangle BCD}=4\times4\div2=8$（平方厘米）。

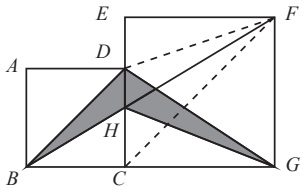


图 12

4．$S_{\triangle BDE}:S_{\triangle ABC}=(BD\times BE):(BA\times BC)=(1\times1):(3\times2)=1:6$，

$S_{\triangle CEF}:S_{\triangle ABC}=(CE\times CF):(CB\times CA)=(1\times3):(2\times4)=3:8$，

$S_{\triangle ADF}:S_{\triangle ABC}=(AD\times AF):(AB\times AC)=(2\times1):(3\times4)=1:6$，

设 $S_{\triangle ABC}=24$ 份，则 $S_{\triangle BDE}=4$ 份，$S_{\triangle ADF}=4$ 份，$S_{\triangle CEF}=9$ 份，$S_{\triangle DEF}=24-4-4-9=7$（份），恰好是 7 平方厘米，所以 $S_{\triangle ABC}=24$ 平方厘米。

5．如图 13 所示，连接 BD，根据题意有

$$S_{\triangle AEB}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD},S_{\triangle CDF}=\frac{1}{2}S_{\triangle CDB},$$

所以 $S_{\triangle ABE}+S_{\triangle CDF}=\frac{1}{2}S_{四边形 ABCD}$，

进而有 $S_{四边形 BFDE}=\frac{1}{2}S_{四边形 ABCD}$，再连接 EF，

$$S_{四边形 BFDE}=S_{\triangle BEF}+S_{\triangle EFD}=\frac{1}{2}(S_{\triangle BEC}+S_{\triangle AFD})$$

$$=\frac{1}{2}\times(2+5)=3.5,$$

所以 $S_{四边形 ABCD}=2\times3.5=7$。

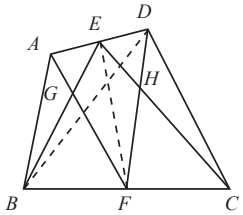


图 13

第 4 讲　经济问题

4.1　利息与纳税问题

例 1

（1）10000+10000×3.75%×3=11125（元）。

（2）$10000\times(1+2.50\%)^3=10768.9062$（元）。

例 2

（1）由于 4480−2000=2480=500+1980=500+1500+480，所以应交税款为 500×0.05+1500×0.1+480×0.15=247（元）。

（2）工资总额 2500 元时，需缴纳税款 25 元；

工资总额 4000 元时，需缴纳税款 1500×10%+25=175（元）；

工资总额 7000 元时，需要缴纳税款 175+3000×0.15=625（元）；

工资总额为 22000 元时，需要缴纳税款 15000×0.2+625=3625（元）。

所以张先生的工资应该在 7000 到 22000 元之间，由于 (1165−625)÷20%=2700（元），所以张先生的工资、薪金收入为 9700 元。

4.2　利润问题

例 3

（1）利润是 1200−1000=200（元），利润率是 $\frac{1200-1000}{1000}\times100\%=20\%$。

（2）实际售价是 180×0.75=135（元），利润率是 $\frac{135-108}{108}\times100\%=25\%$；

（3）当利润率为 35% 时，售价为 800×(1+35%)=1080（元），所以最低折扣为 $\frac{1080}{1440}\times100\%=75\%$，即最低七五折。

例 4

正品的成本是 1800÷(1+20%)=1500（元），赚了 1800−1500=300（元）；处理品的成本是 1800÷(1−20%)=2250（元），赔了 2250−1800=450（元），所以一共赔了 450−300=150（元）。

4.3 综合应用

例 5

（1）设这批笔记本的成本是“1”。那么定价是 1×(1+30%)=1.3，其中 80% 的卖价是 1.3×80%，20% 的卖价是 1.3÷2×20%。因此全部卖价是 1.3×80%+1.3÷2×20%=1.17，利润率是 1.17−1=0.17=17%。

（2）方法一：将剩余的 5 双拖鞋都以 14.8 元的价格售出时，总获利升至 88+14.8×5=162（元），即这批拖鞋以统一价格全部售出时总利润为 162 元；又知每双拖鞋的利润是 14.8−13=1.8（元），则这批拖鞋共有 162÷1.8=90（双）。

方法二：设这批拖鞋共有 x 双，则 $14.8\times(x-5)-13x=88$，解得 $x=90$。

（3）方法一：第 2 天的价格是进价的 1.8×0.9=1.62，第 3 天价格是进价的 1.3 倍，所以进价为 96÷(1.62−1.3)=300（元）。

方法二：设这件衣服的进价是 x 元，则 $1.8x\times0.9-96=13x$，解得 $x=300$。

开放试题

解：设小明买了 x 个鱼肉堡，y 个鸡肉堡，z 个牛肉堡，则有 $7x+9y+14z=92$，

两边取 7 的模，有 $2y\equiv1(\mathrm{mod}7)$，$y=7k+4(k\in\mathbf{N})$，

又 $y\leqslant\frac{92}{9}=10\frac{2}{9}$，那么仅有 $y=4$。

故小明买了 4 个鸡肉堡。

本讲巩固

1．3000 元以内可报销：3000×15%=450（元），3000 元至 4000 元可报销：1000×25%=250（元），450+250=700（元）＜766 元，所以剩余的 66 元是 4000 元至 5000 元范围内报销的，66÷30%=220（元），所以医疗费为 4000+220=4220（元）。

2．利润率不低于 5%，即售价最低为 800×(1+5%)=840（元），由于 840÷1200=0.7，最多可以打七折。

3．新款件服装的成本是 600÷(1+20%)=500（元），赚了 600−500=100（元）；旧款件服装的成本是 600÷(1−20%)=750（元），赔了 750−600=150（元），所以一共赔了 150−100=50（元）。

4．该商品的定价为 (832+960)÷(1−80%)=8960（元），则购入价为：8960−960=8000（元）。

5．方法一：将最后 7 件衬衫按原价出售的话，商店应该获利 702+70×(1−0.8)×7=800（元），按原售价卖每件获利 70−50=20（元），所以一共有 800÷20=40（件）衬衫。

方法二：除掉最后 7 件的利润，一共获利 702−(70×0.8−50)×7=660（元），所以按原价售出的衬衫一共有 660÷(70−50)=33（件），所以一共购进 33+7=40（件）衬衫。

第 5 讲　数论中的规律

5.1 平方数与余数的相关的规律

例 1

（1）1, 11, 111, 1111, 11111, …，中有 1 个完全平方数。

（2）4, 44, 444, 4444, 44444, …，中有 1 个完全平方数。

（3）5, 55, 555, 5555, …，中有 0 个完全平方数。

例 2

1,14,144,1444,14444,…，中有 3 个完全平方数。

例 3

方法一：由于 143≡3(mod7)（143 被 7 除余 3），所以 $143^{89}\equiv3^{89}(\mathrm{mod}7)$（$143^{89}$ 被 7 除所得余数与 3^{89} 被 7 除所得余数相等），而 $3^6=729$，$729\equiv1(\mathrm{mod}7)$（729 除以 7 的余数为 1），

因此 $3^{89}\equiv\underbrace{3^6\times3^6\times\cdots\times3^6}_{14\text{ 个}}\times3^5\equiv3^5\equiv5(\mathrm{mod}7)$，

故 143^{89} 除以 7 的余数为 5。

方法二：计算 3^{89} 被 7 除所得的余数可以用找规律的方法，规律见表 1：

表 1

	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	…
mod7	3	2	6	4	5	1	3	…

从表中可以得出余数以 6 为周期变化，所以 $3^{89}\equiv3^5\equiv5(\mathrm{mod}7)$。

练习 1

（1）根据题意，$2^3\equiv1(\mathrm{mod}7)$，则有 $2^{20}\equiv2^2\equiv4(\mathrm{mod}7)$，所以 2^{20} 除以 7 的余数是 4。

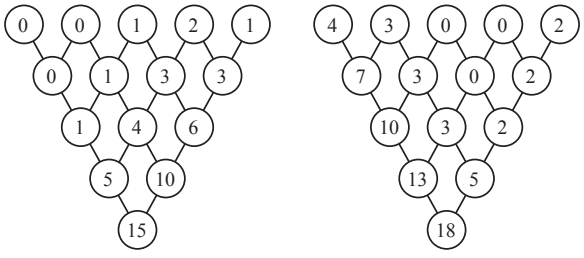
（2）$14^{14}\equiv3^{14}(\mathrm{mod}11)$，由于 $3^5\equiv1(\mathrm{mod}11)$，所以 $14^{14}\equiv3^{14}\equiv3^4\equiv4(\mathrm{mod}11)$，即 14^{14} 除以 11 的余数是 4。

5.2 寻找末尾连续 0 的个数

例 4

（1）从 1×2×3×4×…×30 这 30 个自然数连乘的末尾共 7 个连续的数码 0。

（2）我们可以分别计算质因数 2 和 5 的重数，为此我们画两个图（如图 14 所示），由图 14 可知最后乘积中含有 18 个因数 2，15 个因数 5，所以末尾有 15 个 0。



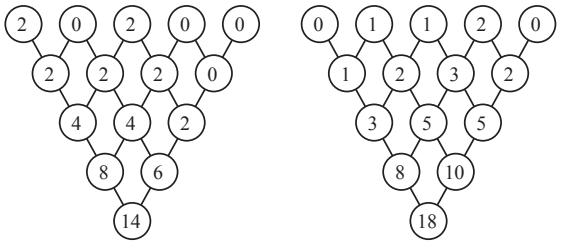
因子 5 的个数　　因子 2 的个数

图 14

练习 2

几个整数的乘积，如果要确定它后面有几个 0，可以用这样的办法：把每个乘数分解质因数，把分解中 2 的重数加起来，5 的重数也加起来，看哪一个小，哪一个就是乘积尾部 0 的个数。

我们可以分别计算质因数 2 和 5 的重数，为此我们画两个图（如图 15 所示），由图可知：A 中含有 14 个因数 2，18 个因数 5，所以末尾有 14 个 0。



因子 2 的个数　　因子 5 的个数

图 15

5.3 综合逻辑推理

例 5

（1）杰瑞应该选编号为 64 的笼子才可以逃生。

（2）先假设有 8 只老鼠分别编号 1,2,3,…8，根据题意得，1 号老鼠被猫吃掉，2 号鼠生存下来；3 号老鼠被猫吃掉，4 号老鼠生存下来……依次下去，通过画图发现，最后剩下的是 8 号老鼠。如果是 16 只老鼠或 32 只老鼠，汤姆还是吃掉一只留一只，依次下去，最后剩下的是 16 号老鼠或 32 号老鼠。因此找到规律，如果有 2^n 只老鼠，每次都吃掉一只留下一只，最后剩下的那只老鼠的编号是被吃掉的第一只老鼠编号的前一个编号。

（3）这一题和上一题的不同之处在于老鼠的只数不是 2^n 的形式，因为 2^8=256，所以应先吃掉 301−256=45（只），吃掉的第 45 只老鼠的编号为 45×2−1=89，第 46 只被吃掉老鼠的编号是 91，因此杰瑞应该选编号为 90 的笼子。

（4）先假设有 9 只老鼠，分别编号 1,2,3,…,9，1 号、2 号老鼠被猫吃掉，3 号老鼠生存下来；4 号、5 号老鼠被猫吃掉……依次下去，通过画图发现，最后剩下的是 9 号老鼠。如果是 27 只老鼠或 81 只老鼠，还是按上述规则进行，最后剩下的是 27 号或 81 号老鼠。因此找到规律，如果有 3^n 只老鼠，每次都吃掉两只留下一只，最后剩下的那只老鼠的编号是被吃掉的第一只老鼠的前一个编号。

（5）因为 3^5=243，所以应先吃掉 301−243=58（只），吃掉的第 58 只老鼠的编号为 58÷2×3−1=86，第 59 只被吃掉老鼠的编号是 88，因此杰瑞应该选编号为 87 的笼子。

开放试题

答案略。

本讲巩固

1．我们不易直接求解，但是其数字有明显的规律，于是我们采用递推（找规律）的方法来求解：$121=11^2$，$12321=111^2$，$1234321=1111^2$，……，我们归纳为 $1234\cdots n\cdots4321=\underbrace{(111\cdots1)}_{n\text{ 个 }1}^2$，所以，$1234567654321=1111111$；$1234567654321\times49=1111111^2\times7^2=7777777^2$。因此，题中原式乘积为 7777777 的平方。

2．平方数的末尾只能是 0,1,4,5,6,9，因为 111,444,555,666,999 都不是完全平方数，所以所求的数最小是 4 位数。考察 1111,1444…可以知道 1444=38×38，所以满足条件的最小正整数是 1444。

3．$28^{121}\equiv2^{121}\equiv2^{12}\times2\equiv2(\mathrm{mod}13)$，所以余数是 2。

4．首先，50,60,70,80,90,100 中共有 7 个 0。其次，55,65,85,95 和任意偶数相乘都可以产生一个 0，而 75 乘以偶数可以产生 2 个 0，50 中的因数 5 乘以偶数又可以产生 1 个 0，所以一共有 7+4+2+1=14（个）0。

5．当有 $64=2^6$（张）卡片时，第一轮过后剩下的是 2 的倍数号卡片，第二轮过后剩下的是 22 的倍数号卡片……第六轮过后，剩下的是 2^6 的倍数号卡片，即就剩下 1 张卡片，是第 64 号卡片。现在有 100 张卡片，如果拿掉 100−64=36（张）卡片，剩下 64 张卡片，那么就变为上述的情况了。拿掉的第 36 张卡片是编号为 36×2−1=71（号）的卡片，此时剩下 64 张卡片，下一个要拿掉的是第 73 号卡片，第 72 号是最后一张。所以，剩下的这张卡片是原来 100 张的第 72 张。

第 6 讲　旋转与轨迹

6.1　图形旋转

例 1

（1）面积为 12×12=144。

（2）因为长方形旋转了三次，所以 点在整个运动过程中也走了三段路程。这三段路程分别是：

第 1 段是弧 AA_2，它的长度是 $2\times\pi\times4\times\frac{1}{4}$（厘米）；

第 2 段是弧 A_2A_2，它的长度是 $2\times\pi\times5\times\frac{1}{4}$（厘米）；

第 3 段是弧 A_2E，它的长度是 $2\times\pi\times3\times\frac{1}{4}$（厘米）；

所以 A 点走过的路程长为：$2\times\pi\times4\times\frac{1}{4}+2\times\pi\times5\times\frac{1}{4}+2\times\pi\times3\times\frac{1}{4}=6\pi=18.84$（厘米）。

练习 1

如图 16 所示，将△OAB 沿着 O 点顺时针旋转 90°，到达△OCF 的位置。

由于 $\angle ABC=90°$，$\angle AOC=90°$，所以 $\angle OAB+\angle OCB=180°$。而 $\angle OCF=\angle OAB$，所以 $\angle OCF+\angle OCB=180°$，那么 B,C,F 三点在一条直线上。由于 $OB=OF$，$\angle BOF=\angle AOC=90°$，所以△$BOF$ 是等腰直角三角形，且斜边 BF 为 5+3=8，所以它的面积为 $8^2\times\frac{1}{4}=16$。

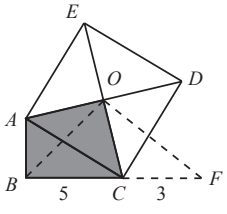


图 16

6.2　线动成面

例 2

羊活动的范围是

$$\pi\times30^2\times\frac{3}{4}+\pi\times20^2\times\frac{1}{4}+\pi\times10^2\times\frac{1}{4}$$

$$=\pi\times\left(30^2\times\frac{3}{4}+20^2\times\frac{1}{4}+10^2\times\frac{1}{4}\right)=2512$$（平方米）。

例 3

$\frac{1}{4}\times(3.14\times6^2-3.14\times4^2)+3.14\times1^2=18.84$（平方厘米）

练习 2

首先在羊圈内，羊能到达羊圈中 3×4=12（平方米）的所有空间，在羊圈外，根据勾股定理求出，羊圈的对角线长为 5 米，所以拴绳可以从 B 处穿出的长度最多有 4 米，所以羊圈以外的部分可以看作半径为 4 米的四分之三圆和一个半径为 1 米的四分之一圆，如图 17 所示：

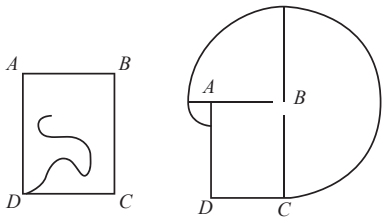


图 17

$$S=4\times3+\pi\times1^2\times\frac{1}{4}+\pi\times4^2\times\frac{3}{4}=12+\left(12+\frac{1}{4}\right)\times\pi$$

$=50.465\approx50.47$（平方米）

例 4

（1）面积为 $100\pi\times\frac{90}{360}=25\pi=78.5$（平方厘米）

（2）$\frac{1}{3}\times3.14\times(10^2-5^2)=78.5$（平方厘米）

（3）① DC 边和 BC 边旋转后扫过的图形都是以线段长度为半径的圆的 $\frac{1}{4}$，因此 DC 边扫过图形的面积为 4π，BC 边扫过图形的面积为 $\frac{9\pi}{4}$。

② 研究 AB 边的情况。

ACA' 面积－扇形 BCB' 面积＝$\frac{5^2\pi}{4}-\frac{3^2\pi}{4}=4\pi$

③ 研究 AD 边扫过的图形。面积为

$\frac{5^2\pi}{4}-\frac{4^2\pi}{4}=\frac{9}{4}\pi$。

旋转图形的关键，是先从整体把握一下“变化过程”，即它是通过什么样的基本图形经过怎样的加减次序得到的。先不去考虑具体数据，一定要把思路捋清楚。最后你会发现，所有数据要么在题目中直接告诉你，要么就“藏”在那儿，一定会有。

可以进一步思考，比如平行四边形的旋转问题、一般三角形的旋转问题，等等，此类问题的解决有助于提高解决几何图形问题的能力。

练习 3

如图 18 所示，端点 A 扫过的轨迹为 $AA''A'$，端点 D 扫过的轨迹为 $DD''D'$，而 AD 之间的点扫过的轨迹，在以 A,D 的轨迹和 $AD,A'D'$ 所形成的封闭图形内，且这个封闭图形内的每一点都会有线段 AD 上的某点扫过，所以 AD 边扫过的图形为阴影部分。显然，阴影部分面积为 $S_{\mathrm{Rt}\triangle A'D'C}+S_{\text{扇形}ACA'}-S_{\mathrm{Rt}\triangle ACD}-S_{\text{扇形}CD'D}$，而 Rt△$A'D'C$ 和 Rt△ACD 面积相等。

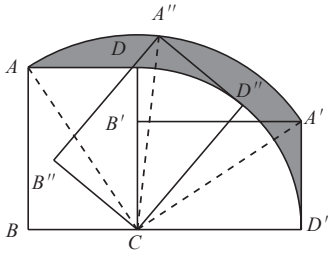


图 18

$S_{\mathrm{Rt}\triangle A'D'C}+S_{\text{扇形}ACA'}-S_{\mathrm{Rt}\triangle ACD}-S_{\text{扇形}CD'D}=S_{\text{扇形}ACA'}-S_{\text{扇形}CD'D}$

$=\frac{90\pi}{360}AC^2-\frac{90\pi}{360}CD^2=\frac{\pi}{4}\times(5^2-4^2)=\frac{9}{4}\pi=7.065$（平方厘米）

即 AD 边扫过部分的面积为 7.065 平方厘米。

6.3 面动成体

例 5

（1）以 5 为半径，高为 2 的圆柱体体积为 $\pi\times5^2\times2=50\pi$，以 2 为半径，高为 5 的圆柱体，体积为 $\pi\times2^2\times5=20\pi$，所以圆柱体积最大是 $50\pi=157$（立方厘米）。

（2）以 3 厘米的边为轴旋转一周所得到的是底面半径是 4 厘米，高是 3 厘米的圆锥体。

体积为$\frac{1}{3}\times3.14\times4^2\times3=50.24$（立方厘米）。

以 4 厘米的边为轴旋转一周所得到的是底面半径是 3 厘米，高是 4 厘米的圆锥体。

体积为$\frac{1}{3}\times3.14\times3^2\times4=37.68$（立方厘米）。

以 5 厘米的边为轴旋转一周所得到的是底面半径是斜边上的高 $3\times4\div5=24$（厘米），高之和是 5 厘米的两个圆锥的组合体。

体积为$\frac{1}{3}\times3.14\times2.4^2\times5=30.144$（立方厘米）。

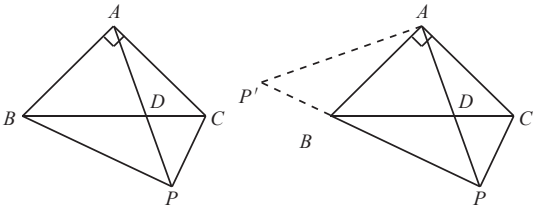
综上体积最小为 30.144 立方厘米。

开放试题

答案略

本讲巩固

1．如图 19 所示，因为 $\angle BAC$ 和 $\angle BPC$ 都是直角，和为 180°，所以 $\angle ABP$ 和 $\angle ACP$ 的和也为 180°，可以旋转三角形 APC，使 AC 和 AB 重合，则四边形的面积转化为等腰直角三角形 $AP'P$，面积为 $10\times10\div2=50$（平方厘米）。



（a）　（b）

图 19

2．图 20 中所示圆弧即为 A 点走过的路程，分为两段，均为圆心角为 120°、半径为 1 的扇形的圆弧。

两个扇形圆弧长之和 $=2\times\pi\times1\times\frac{120°}{360°}\times2=\frac{4}{3}\pi$，

即 A 点走过的路程的长是$\frac{4\pi}{3}$。

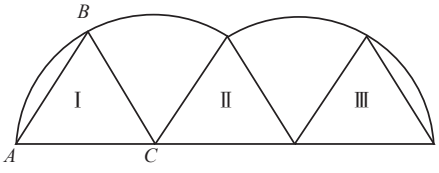


图 20

3．面积是 $\frac{3}{4}$ 大圆加上 2 个 $\frac{1}{4}$ 小圆，即 $\frac{3}{4}\times\pi\times 14^2+2\times\frac{1}{4}\times\pi\times 4^2=155\pi=465$（平方分米）。

4．从图 6-25 中可以看出，直角三角形扫过的面积就是图中图形的总面积，等于一个三角形的面积与四分之一圆的面积之和。圆的半径就是直角三角形的斜边 OA。

因此可以求得，三角形扫过的面积为

$24+\frac{1}{4}\times\pi\times 10\times 10=24+25\pi=99$（平方厘米）。

5．图 6-26（a）的体积为 $\frac{1}{3}\times 3.14\times 5^2\times 12$，

图 6-26（b）的体积是 $\frac{1}{3}\times 3.14\times 12^2\times 5$，

图 6-26（c）的体积是 $\frac{1}{3}\times 3.14\times\left(\frac{60}{13}\right)^2\times 13$，

因此体积最大的是图（b），

最大体积为 $\frac{1}{3}\times 3.14\times 12^2\times 5=753.6$。

第 7 讲　算两次

7.1　应用题中的算两次

例 1

解：列方程 $\begin{cases}5(v_2+v_1)=v_2t,\\10(v_2-v_1)=v_2t,\end{cases}$

进一步扩展得 $5(v_2+v_1)=10(v_2-v_1)$，

由方程解得 $v_2=3v_1$，代入原方程组，有 $5(3v_1+v_1)=3v_1t$，即 $5\times(3+1)=3t$，解得 $t=\frac{20}{3}$。

7.2　图形中的算两次

例 2

（1）解：设大正方形的边长为 $3x$，小正方形的边长为 $2x$，因此有 $(3x+3x)(3x+2x)=120$，解得 $x^2=4$，即 $x=2$，所以小正方形的边长为 $2\times 2=4$（厘米），大正方形的边长为 $2\times 3=6$（厘米），原长方形的长为 $4\times 3=12$（厘米），宽为 $4+6=10$（厘米）。

（2）原长方形的面积为 $1\times 1+4\times 4+4\times 4+5\times 5+6\times 6+7\times 7=143$（平方厘米）。

练习 1

为了便于观察，对原题图中长方形进行平移，如图 21 所示：

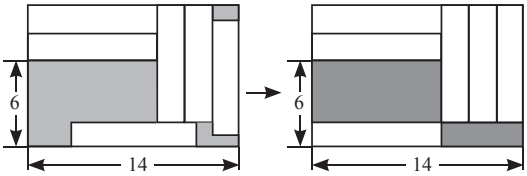


图 21

观察图 21 中长方形的长与宽，不难发现它们有下列关系：

1 个长 +3 个宽 =14，

1 个长 −1 个宽 =6，

利用代入法可得 14=1 个长 +3 个宽 =1 个宽 +6+3 个宽。

所以，1 个宽 =(14−6) ÷ (1+3)=2，1 个长 =2+6=8。

可得长方形的面积 =(6+2×2) ×14=140，阴影部分的总面积 =140−6×2×8=44。

例 3

方法一：A 和 B 两个圆圈中所填的数之差（大数减小数）是 4。

也可以列方程解答。

方法二：设各条直线上的三个数之和都为 s，$2(1+2+3+\cdots+8)-B=5s$，即 $72-B=5s$，

所以 $\begin{cases}B=2,\\s=14,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}B=7,\\s=13,\end{cases}$ 由于 $(1+2+3+\cdots+8)+A=3s$，即 $36+A=3s$，

因此有 $\begin{cases}s=14,\\A=6,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}s=13,\\A=3,\end{cases}$ 综合有 $\begin{cases}B=2,\\s=14,\\A=6,\end{cases}$

$\begin{cases}B=7,\\s=13,\\A=3,\end{cases}$ 所以 A 和 B 两个圆圈中所填的数之差（大数减小数）是 4。

练习 2

将三条边上四个数的和全部相加，和除每个数计算了 1 遍外，三个顶点的数多算了 1 遍。9 个数之和为 117，所以有 117+ 三个顶点的数之和 =3× 每条边上四个数之和。那么每条边上四个数的和最大是 $(117+25+22+19)\div 3=61$。

7.3 组合与计数中的算两次

例 4

显然 A 是将这个图横着看的，由于数加数的个数不超过 7 个，故知行数不超过 7；接下来再将这个图竖着看，由于行数不超过 7，故知每一列的点数不大于 7，这就是 B 中的一种分拆：18=5+4+3+3+1+1+1；可见只要有一种 A 中的分拆，就唯一地对应一种 B 中的分拆，这是一一对应关系，所以 $A=B$。

例 5

①艾迪的选法就是：自己去，有 C_n^0 种选法；选 1 个人，有 C_n^1 种选法；选 2 个人，有 C_n^2 种选法；……；选 n 个人（全去），有 C_n^n 种选法；故从艾迪的角度考虑，选法数是 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n$；

②从全班同学的角度考虑，每个人都只有两种情况：被选中，或没有被选中，故选法数是 2^n；

综上所述，可知 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$。

练习 3

阅读材料就是证明过程的提示，继续阅读材料：

他可以直接从全班 $(n+1)$ 名同学中挑选 k 名，有 C_{n+1}^k 种方法；

或者艾迪先决定自己做不做值日：若他不做值日，则他需要在其余 n 名同学中挑选 k 名，有 C_n^k 种方法；若他自己做值日，则他需要在其余 n 名同学中挑出 $(k-1)$ 名，有 C_n^{k-1} 种方法；共有 $(C_n^k+C_n^{k-1})$ 种方法。综上所述，可知 $C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$。

开放试题

设共有 n 个三角形。从“角的度数”这个角度考虑，所有三角形的内角度数之和 S，有两种算法：

① 每个三角形的内角和是 180 度，故 $S=180n$；

② 每一个内部的点，都会产生 360 度；每一个正方形的顶点，都会产生 90 度，故 $S=360\times2013+90\times4$；

所以 $180n=360\times2013+90\times4$，解得 $n=4028$。

接下来算线段数：线段都是三角形的边，4028 个三角形共有 (4028×3) 条边，其中外围 4 条边不是新引的线段，所以新引线段所产生的边有 $(4028\times3-4)$ 条；但是每条线段被两个三角形的边共用，所以新引的线段共 $(4028\times3-4)\div2=2014\times3-2=6040$（条）。

本讲巩固

1. $\begin{cases}16(v_2+v_1)=s\\22(v_2-v_1)=s\end{cases}$

2. 由图 7-9（a）可以看出小长方形的长加上小正方形的边长等于小长方形的两个宽，设小长方形的宽为 x 厘米，则小长方形的长为 $(2x-2)$ 厘米，根据图 7-9（b）小长方形的 3 个长等于小长方形的 5 个宽，列方程得 $5x=3(2x-2)$，解得 $x=6$，所以小长方形的长为 10 厘米，宽为 6 厘米。

3. 如果每条直线上的红圈数都是奇数，而五角星有五条边，奇数个奇数之和为奇数，那么五条线上的红圈共有奇数个（包括重复的）。从另一个角度看，由于每个圆圈是两条直线的交点，则每个圆圈都要计算两次，因此，每个红圈也都算了两次，总个数应为偶数，所以，两个角度得出的结果相互矛盾。不可能使得在同一条直线上的红圈数都是奇数。

4. 证明如图 22 所示：

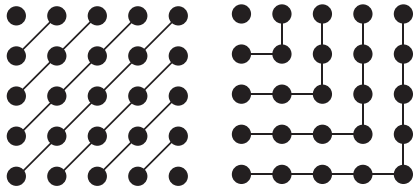


图 22

5. 阅读材料就是证明过程的提示，继续阅读材料：

①先选小组，有 C_n^r 种选法，再在其中选出组长，有 $C_r^1=r$ 种选法，故共有 rC_n^r 种选法；

②先选组长，有 $C_n^1=n$ 种选法，还要从其余 $(n-1)$ 名同学中选出 $(r-1)$ 名组员，有 C_{n-1}^{r-1} 种选法，故共有 nC_{n-1}^{r-1} 种选法；综上所述，可知 $rC_n^r=nC_{n-1}^{r-1}$。

第 8 讲　从极端考虑

8.1　几何中的极端考虑

例 1

（1）考虑极端情况，中间的点取正方形的中心，阴影部分面积为总面积的一半，即 4÷2=2。

（2）方法一：中间点是任意的，所以从极端考虑，假设中间点在中心位置，那么图形如图 23 所示：正六边形恰好被分成 6 个完全一样的正三角形，阴影部分占 3 个，所以阴影部分面积为正六边形的一半，所以面积为 6÷2=3。

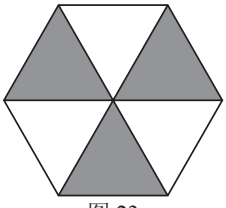
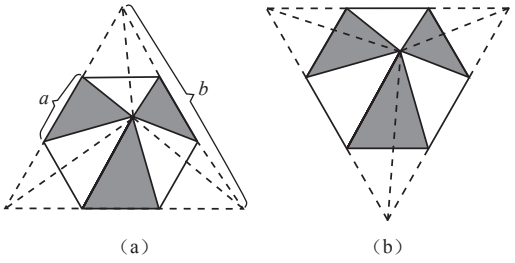


图 23

方法二：延长正六边形不相邻的三条边至相交，形成一个正三角形，如图 24（a）所示，设六边形边长为 a，三角形边长为 b。连接中间点和三角形三个顶点，把三角形分成三个小三角形，由等高模型，三个小三角形中的三块阴影都分别占小三角形的 $\frac{a}{b}$，三块阴影的面积和也为大正三角形面积的 $\frac{a}{b}$。延长另外三条边直至相交，形成正三角形，如图 24（b）所示，三角形边长也为 b，可以推出空白部分面积也为三角形面积的 $\frac{a}{b}$，所以阴影部分和空白部分面积相等，阴影部分面积为六边形的一半，即 6 ÷ 2 = 3。



（a）　（b）

图 24

（3）考虑极端情况，中间的点取正八边形的中心，阴影部分面积为总面积的一半，即 10÷2=5。

练习 1

考虑极端情况，中间的点取正十边形的中心的话，阴影部分面积为总面积的一半。

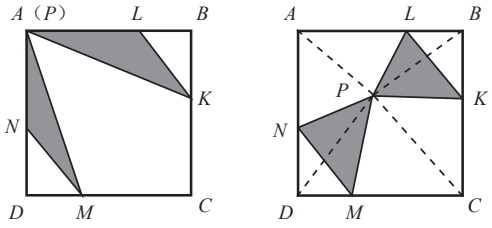
例 2

阴影部分的面积为 $6^2\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)$=15（平方厘米）。

练习 2

方法一：特殊点法。由于 P 是内部任意一点，不妨设 P 点与 A 点重合，如图 25（a）所示，那么阴影部分就是 $\triangle AMN$ 和 $\triangle ALK$，而 $\triangle AMN$ 的面积为 (12−5)×4÷2=14，$\triangle ALK$ 的面积为 (12−4)×5÷2=20，所以阴影部分的面积为 14+20=34。

方法二：寻找可以利用的条件，如图 25（b）所示连接 AP,BP,CP,DP，



（a）　（b）

图 25

则有 $S_{\triangle PDC}+S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}S_{正方形ABCD}=\frac{1}{2}\times12^2=72$，

同理可得 $S_{\triangle PAD}+S_{\triangle PBC}=72$，

而 $S_{\triangle PDM}:S_{\triangle PDC}=DM:DC=4:12=1:3$,

即 $S_{\triangle PDM}=\frac{1}{3}S_{\triangle PDC}$;

同理 $S_{\triangle PBL}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAB}$，$S_{\triangle PND}=\frac{5}{12}S_{\triangle PDA}$，

$S_{\triangle PBK}=\frac{5}{12}S_{\triangle PBC}$，

所以 $(S_{\triangle PDM}+S_{\triangle PBL})+(S_{\triangle PND}+S_{\triangle PBK})=\frac{1}{3}(S_{\triangle PDC}+S_{\triangle PAB})+\frac{5}{12}(S_{\triangle PDA}+S_{\triangle PBC})$;

而

$(S_{\triangle PDM}+S_{\triangle PBL})+(S_{\triangle PND}+S_{\triangle PBK})=\underbrace{(S_{\triangle PNM}+S_{\triangle PLK})}_{\text{阴影面积}}+(S_{\triangle DNM}+S_{\triangle BLK})$，

$S_{\triangle PDM}=S_{\triangle PBL}=\frac{1}{2}\times4\times5=10$;

所以阴影部分的面积是

$S_{\triangle PNM}+S_{\triangle PLK}=\frac{1}{3}(S_{\triangle PDC}+S_{\triangle PAB})+\frac{5}{12}(S_{\triangle PDA}+S_{\triangle PBC})$

$-(S_{\triangle DNM}+S_{\triangle BLK})=\frac{1}{3}\times 72+\frac{5}{12}\times 72-10\times 2=24+30-20=34$。

8.2 数论中的极端考虑

例 3

最大的是 999−101=898，最小的是 100+152=252。

例 4

差最大为 825。

练习 3

4 的倍数的特点，后两位为一个奇数和 2,6 或一个偶数和 4,8，所以想组出三个 4 的倍数则 2,4,6,8 都必须用在后两位里，首位最大为 5,7,9 开头。 考虑 5 开头的三位数，584,732,916 满足条件，故最小为 584。

8.3 组合与计数中的极端考虑

例 5

至少得 10 分一定能够出线。

练习 4

极端情况是前 3 名分数相同，后 9 名分数相同；构造差最大：令前 3 名全部战胜后 9 名，且前 3 名之间各自一胜一负，后 9 名之间全部平局；此时前 3 名得分为 3×10=30（分），后 9 名得分为 8 分，分差为 30−8=22（分）。

开放试题

先考虑距离最短的两个人，他们相互击中，再考虑剩下的 n−2 个人中距离最短的两个人，他们只会用水枪打对方或者是之前的两个人，不会打剩下的 n−4 个人，再看剩下的 n−4 个人中距离最短的两个人，他们也不会打除掉这两人之外剩下的 n−6 个人……直到还剩最后一人，他没有被前面 n−1 个人击中，所以身上是干的。

本讲巩固

1．方法一：特殊点法。由于 P 是 BC 上任意一点，不妨设 P 在点 B，如图 26（a）所示，则此时 x=0，那么 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\times y=42$，得到 y=7，$x+y$=7。

方法二：如图 26（b）所示，连接 AP，三角形 ABC 的面积等于三角形 APB 与三角形 APC 的面积之和，而这两个三角形的底 AB,AC 相等，高分别为 x 和 y，所以 $12\times(x+y)\times\frac{1}{2}=42$，可得 $x+y$=7。

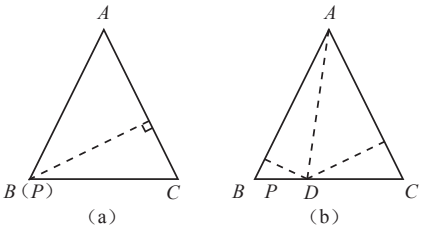


图 26

2．$S_{\triangle JAB}+S_{\triangle JCD}+S_{\triangle JEF}$ 为正六边形面积的 $\frac{1}{2}$，由等高模型知，阴影部分面积为 $S_{\triangle JAB}+S_{\triangle JCD}+S_{\triangle JEF}$ 的 $\frac{1}{3}$，所以阴影部分面积为六边形面积的 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，即为 4。

3．能被 4 和 41 整除即能被 [4,41]=164 整除。用试除法，2012000÷164=12268……48，2012000 再加上 164−48=116 就能被 164 整除，所以这样的七位数最小为 2012116。

4．要求至少能得几个，则另 4 人应尽可能多，最多的得 21 个，则依次是 20,19,18 用 90−(21+20+19+18)=12（个）。

5．先分析出线队：先进行极端分析，0 分肯定不行，1 分则至少输给了两个队，那赢的两个队至少 3 分，都比 1 分多，也不行。2 分是可以的，设四队为 A,B,C,D 分别得分 9,2,2,2，A 胜 B,C,D,B,C,D 互相平局，则 B,C,D 中必有一队得第二名。再分析出局队：9 分肯定是第一，7 分则至少赢了两个队，剩下的两个队最多 6 分，都比 7 分少，这都能确保不会是后两名。6 分就不一定了，如果四队分别得分 6,6,6,0，D 输 A,B,C，A 胜 B，B 胜 C，C 胜 A，则 A,B,C 中必有一队没有拿到前两名。 所以最极端的情况分别是，2 分出线，6 分出局，所以差 4 分。

第 9 讲　数字谜中的计数

9.1　枚举计数

例 1

（1）共有 9+8+7+…+2+1=45（种）填法。

（2）共有 10×(9+8+7+…+2+1)=450（种）填法。

练习 1

其中被减数的十位数字只能为1，

当被减数为10时，减数可以是1～9，共9种；

当被减数为11时，减数可以是2～9，共8种；

……

当被减数为18时，减数可以是9，共1种。

因此共有9+8+7+…+2+1=45（种）填法。

例 2

6 个因数经检验后只有 1 不符合题意，其他 5 个都符合。故共有 5 种不同填法。

练习 2

将2012分解成2012=2×2×503，易知2012的因数是一位数的有1,2,4三个，检验后符合题意的只有4×503这一种填法。

9.2　加乘原理计数

例 3

一共有 5×(4×3×2×1)=120（种）可能。

例 4

共有 2×2×2×2=16（种）不同的代表数的方法。

数字谜一旦答案不唯一，那么“最值”和“计数”肯定是分不开的。

9.3　综合计数

例 5

方法一：

因此所有迎春数的和为 102564+128205+153846+179487+205128+230769=999999。

方法二：

由于是把六位数 $\overline{abcdef}$ 的末位 f 调到首位构成了新六位数 $\overline{fabcde}$，所以不妨把 $\overline{abcde}$ 看成一个整体，设 $\overline{abcde}=A$，则根据位值原理可知“迎春数”是 $(10A+f)$，并满足关系式：$4\times(10A+f)=100000f+A$，对等式化简得 $39\times A=99996\times f$。

解得 $A=2564\times f$。

因为 A 是五位数，f 是一位数，所以 f 可以为 4,5,6,7,8,9。

而“迎春数” $\overline{abcdef}=10A+f=10\times2564\times f+f=25641\times f$,

那么，所有“迎春数”的总和是

$25641\times(4+5+6+7+8+9)=25641\times39=999999$。

练习 3

本题可以有两种分析方法：

方法一：可以用大家喜欢的数字谜的方法来解。列竖式如图 27 所示：

$$\begin{array}{r} a\ \ b \\ \times\quad\ 7 \\ \hline a\ 0\ b \end{array}$$

图 27

通过分析 $b\times7=b$ 知道 $b=5$，同时向前进 3，同时 $a\times7+3=\overline{a0}$，知道 $a=1$，所以 $\overline{ab}=15$。

方法二：将 $\overline{ab}\times7=\overline{a0b}$，展开整理得

$(a\times10+b)\times7=a\times100+0+b$

$70a+7b=100a+b$

$30a=6b$

$5a=b$

由于位值的性质，每个数位上的数值在 0～9 之间，得出 $a=1,b=5$。

开放试题

观察第一个减法算式，可得被除数的万位为 1，所以个位也为 1。

被除数是 1 □ 2 □ 1，它等于 10201+ □ 0 □ 0，是 101 的倍数，而 101 是质数，商是两位数，所以除数是 101 的倍数，且不能被 2 或 5 整除（因为被除数也不能被整除）。

如果除数是 101，则它乘以商的个位后不能是四位数；如果除数是 303，则它乘以商的个位后，百位为 1，只能是 303×7=2121，且 212 和它上面的□ 0 □（它等于 303 与商的十位之积）相加后是四位数，只能是 909，经检验，符合条件，被除数为 11211；

如果除数是 707，则它乘以商的个位后，百位为 1，只能是 707×3=2121，且 212 和它上面的□ 0 □（它等于 707 与商的十位之积）相加后是四位数，不符

合条件；
如果除数是909，则它乘以商的个位后，百位为1，只能是909×9=8181，且818和它上面的□0□（它等于909与商的十位之积）相加后是四位数，只能是909，经检验，符合条件，被除数为17271。
综上所述，所有满足条件的被除数之和为11211+17271=28482。

本讲巩固

1．由$A+\overline{AB}=\overline{BC}$列竖式得，$\begin{array}{r} A \\ +\,A\ B \\ \hline B\ C \end{array}$
可知$A+B>10$，$B-A=1$，因此$A\geqslant 5$，$B\geqslant 6$。
所以正整数A=5,6,7,8；相应的B=6,7,8,9，一共有4个这样的算式。
2．因为2013=3×11×61，因此只有671×3=2013这一种填法。
3．如图28所示，被减数的个位必须向十位数借位，

$$\begin{array}{rccc} & 1 & 0 & 5\ \square \\ - & & 9 & 5\ \square \\ \hline & & & 9\ \square \end{array}$$

图28

当四位数为1050时，三位数可以填951～959共9种；
当四位数为1051时，三位数可以填952～959共8种；
……
当四位数为1058时，三位数可以填959共1种。
因此共有9+8+7+…+2+1=45（种）填法。
4．算式可转换成2007+$\overline{令营}$=$\overline{第七届冬}$，“令营”最大为76，76+2007<2100，所以“第”=2，“七”=0，则还剩下7+$\overline{令营}$=$\overline{届冬}$，“届”≠“令”，所以个位有进位，“届”=“令”+1，“营”+7=10+“冬”，“营”=3+“冬”，还剩1,3,4,5,6,7这6个数字，可试出有4种情况。
5．1到9之和为45，现要求和为31。所以只要取几个数和为7，然后减去这几个数就可以了。
具体的有一个或两个数和为7，7=1+6=2+5=3+4，其中减号不能放开头，因此1+6舍去，共3种；三个数和为7，7=1+2+4，共有1种（舍去）。所以123456789中间加减号或加号等于31，共有3种填法。

第10讲　工程问题进阶

10.1　合作类工程问题（整体法）

例1

（1）$1\div\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{15}-\frac{1}{30}\right)=12$（天）。

（2）同时打开这4个阀门需要$\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\frac{1}{30}\right)\div 3=\frac{1}{18}$，$1\div\frac{1}{18}=18$（分钟）。

练习1

从题中可以看出，A,B,C,D四人每天完成总量的$\frac{1}{6}$，B,C,D,E四人每天完成总量的$\frac{1}{8}$，A,E两人每天完成总量的$\frac{1}{12}$，可见，E一人每天完成总量的$\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{6}\right)\div 2=\frac{1}{48}$，所以E一人单独干需要$1\div\frac{1}{48}=48$（天）。

例2

（1）他们完成工作的总时间为$2\div\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}\right)=\frac{21}{4}$（时），甲完成了$\frac{1}{6}\times\frac{21}{4}=\frac{7}{8}$；所以丙帮甲做了$\frac{1}{8}\div\frac{1}{14}=1\frac{3}{4}$（时）；帮乙做了$\frac{21}{4}-1\frac{3}{4}=3\frac{1}{2}$（时）。

（2）如果A工程的工作量是1，则B工程的工作量是$1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$，三队最后合作完成的工作量是$1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$。三队一共用的时间是$\frac{9}{4}\div\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{24}+\frac{1}{30}\right)=18$（天），乙队完成的工作量是$\frac{1}{24}\times 18=\frac{3}{4}$，剩下的工作量是丙完成，所以丙与乙合作的

天数是$\frac{1}{2}\div\frac{1}{30}=15$（天）。

10.2 功倍时半

例3

乙6小时单独完成的工作量是$1-\frac{13}{30}-\frac{2}{5}=\frac{1}{6}$；

两人合做6小时，甲完成的工作量是

$\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\times\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}$；

甲单独做时，每小时完成的工作量是

$\frac{1}{5}\div 6\div\left(1+\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{33}$；

甲单独做这件工作需要的时间是

$1\div\frac{1}{33}=33$（时）。

例4

零件总数：$12\div\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{60}\right)=3600$（个）

甲的工作效率：3600÷60=60（个）

乙的工作效率：3600÷50=72（个）

两人合做需要$3600\times\frac{2}{3}\div[60\times(1+40\%)+(72+4)]$=15（时）。

练习2

设工作总量为1，设甲、乙两队的工作效率依次为x,y，

列得方程组$\begin{cases}60(x+y)=1,\\84(2x+0.5y)=1,\end{cases}$

消去y得$x=\frac{1}{420}$，$1\div\frac{1}{420}=420$，即甲单独完成这项工作需420天。

10.3 综合

例5

（1）轮换交替类工程

乙的效率为$\frac{1}{14}$，甲的效率为$\left(1-\frac{1}{14}\times 4\right)\div 5=\frac{1}{7}$，如果第一天乙做，9天之后还差$\frac{1}{7}-\frac{1}{14}=\frac{1}{14}$，

所以比上次轮流的做法多用$\frac{1}{14}\div\frac{1}{7}=\frac{1}{2}=0.5$（天）。

（2）量率结合类工程

甲、乙两人合作的工作效率：$1\div 2\frac{2}{5}=\frac{5}{12}$；

甲、丙两人合作的工作效率：$1\div 2\frac{6}{7}=\frac{7}{20}$；

乙、丙两人合作的工作效率：$1\div 3\frac{3}{4}=\frac{4}{15}$；

甲的工作效率：$\left(\frac{5}{12}+\frac{7}{20}+\frac{4}{15}\right)\div 2-\frac{4}{15}=\frac{1}{4}$，

甲单独干需要的时间：$1\div\frac{1}{4}=4$（天）；

同理，乙、丙单独干各需要6天和10天。

甲、乙合干1天需支付工程款：$1800\times\frac{5}{12}$=750（元）；乙、丙合干1天需支付工程款：$1500\times\frac{4}{15}$=400（元）；

甲、丙合干1天需支付工程款：$1600\times\frac{7}{20}$=560（元）；

甲干1天得(750+400+560)÷2−400=455（元）；

乙干1天得750−455=295（元），丙干1天得560−455=105（元），

所以应该选乙，需支付1770元。

练习3

设甲的工作效率为m，乙的工作效率为n，则有

$(m+n)+(m+n)+\cdots+(m+n)+m=1$，

$(n+m)+(n+m)+\cdots+(n+m)+n+0.5m=1$。

因为前面的工作量都相等，所以$m=n+m\times 0.5$，即$m=2n$。由乙单独完成这项工程需要20天，知$n=\frac{1}{20}$，所以$m=\frac{1}{10}$即甲单独完成这项工程需要$1\div\frac{1}{10}=10$(天)。

开放试题

答案略

本讲巩固

1．设这件工作的工作量是1。甲、乙两人合做每天完成$\frac{1}{36}$，甲、丙两人合做每天完成$\frac{1}{60}$，乙、丙两人合做每天完成$\frac{1}{45}$，甲、乙、丙三人合做每天完成$\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{45}+\frac{1}{60}\right)\div 2=\frac{6}{180}=\frac{1}{30}$，减去乙、丙两人每天完成的工作量，甲每天完成$\frac{1}{30}-\frac{1}{45}=\frac{1}{90}$，甲独做需要$1\div\frac{1}{90}=90$（天），故甲一人独做需要90天完成。

2．设一、二、三、四、五小队的工作效率分别是x,y,z,w,r，总工程量为1，则由题得$\begin{cases}x+y+z=\frac{1}{12},\\x+z+r=\frac{1}{9},\\y+w+r=\frac{1}{8},\\x+z+w=\frac{1}{18},\end{cases}$

由此可以看出，一队、三队在式中各出现3次，二队、四队、五队各出现2次。如果将第三个式子两边都乘以2，那么各队的工作效率就都被计算了3次。

所以五个小队的工作效率之和为$\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\times 2+\frac{1}{18}\right)\div 3=\frac{1}{6}$，合干需要$1\div\frac{1}{6}=6$（天）。

3．10甲+10乙=8甲+13乙，可以推出2甲=3乙。设甲的效率为3，乙的效率为2，则总工作量为3×10+2×10=50；则甲先抄2小时后甲乙合抄还需$\frac{50-3\times 2}{3+2}=8.8$（时）。

4．因为甲比乙的工作效率高，又要求合做的天数尽可能少，所以除了两人合做之外，其余工程应由甲单独完成。现设两人合做x天，则甲单独做$8-x$天，于是得到方程

$\left(\frac{1}{10}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{15}\times\frac{9}{10}\right)\times x+\frac{1}{10}\times(8-x)=1$，

解得$x=5$，所以，在满足条件的情况下，两人至少要合作5天。

5．每一个周期效率和为$\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{4}{15}$，需要3个周期，还剩下$\frac{1}{5}$的工作量，甲工作完后乙还需要$\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)\div\frac{1}{10}=\frac{1}{3}$（时），所以总时间为$3\times 2+1+\frac{1}{3}=7\frac{1}{3}$（时）。

第11讲　变速问题

11.1　简单的变速问题

例1

（1）根据题意可得，去时的平均速度为$2\div(1\div 5+1\div 15)=\frac{15}{2}$（千米／时），回来时的速度为$\frac{1}{3}\times 15+\frac{2}{3}\times 5=\frac{25}{3}$（千米／时）；去时的时间与回来的时间比为$\frac{25}{3}:\frac{15}{2}=20:18$，所以家到学校的路程是$20\times\frac{15}{2}=150$（千米）。

（2）跑步速度与步行速度比为$5:1\frac{3}{4}=20:7$。

练习1

设乐乐上学路上所用时间为2，那么走一半平路所需时间是1。由于下坡路与一半平路的长度相同，根据路程一定，时间比等于速度的反比，走下坡路所需时间是$1\div 1.6=\frac{5}{8}$，因此，走上坡路需要的时间是$2-\frac{5}{8}=1\frac{3}{8}$，那么，上坡速度与平路速度的比等于所用时间的反比，为$1:1\frac{3}{8}=8:11$，所以，上坡速度是平路速度的$\frac{8}{11}$倍。

11.2　比例法解变速问题

例2

（1）现在13−1=12（点）即可到达。

（2）提速后用时为$12.6\div 6\times 5=10.5$（时）。

（3）弟弟每分钟行$15\div(25-24)\times 20=300$（米）

例3

甲乙两地相距 200÷(360−60)×360=240（千米）。

例4

上海、南京两市之间的距离是 120÷100×240=288（千米）。

练习2

设 3 次提速前的速度是 100，则 3 次提速前后的速度比是 100∶[100×(1+20%)×(1+25%)×(1+30%)]=20∶39，根据路程一定，时间比等于速度的反比。所以经过这三次提速后，时间比是 39∶20，从甲城到乙城乘火车只需 19.5÷39×20=10（时）。

11.3 环形跑道上的变速问题

例5

甲原来的速度为 (150+22)÷2=86（米/分），乙原来的速度为 150−86=64（米/分）。

练习3

因为相遇前后甲、乙的速度和没有改变，如果相遇后两人合跑一圈用 25 秒，则相遇前两人合跑一圈也用 25 秒。

方法一：甲以原速 $v_{甲}$跑了 25 秒的路程与以 $v_{甲}+4$ 的速度跑了 25 秒的路程之和等于 400 米，$25v_{甲}+25(v_{甲}+4)=400$，解得 $v_{甲}=6$（米/秒）。

方法二：由跑同样一段路程所用的时间一样，得到 $v_{甲}+4=v_{乙}$，即二者速度差为 4；而二者速度和为 $v_{甲}+v_{乙}=400\div25=16$，这是个典型的和差问题。可得 $v_{甲}$为 (16−4)÷2=6（米/秒）。

开放试题

能遇上15艘从纽约开来的轮船。

这就是著名的柳卡问题。下面介绍的法国数学家柳卡•斯图姆给出的一个非常直观巧妙的解法。他先画了一幅图（如图29所示）：

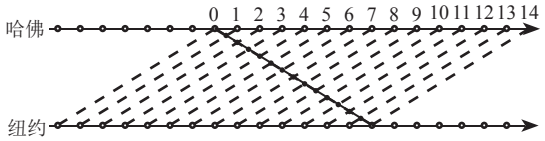


图29

在平面上画两条平行线，以一条直线表示哈佛，另一条直线表示纽约。那么，从哈佛或纽约开出的轮船，就可用图中的两组平行线来表示。图中的每条线段分别表示每艘船的运行情况。实线表示从哈佛驶出的轮船在海上的航行，它与其他线段的交点即为与对方开来轮船相遇的情况。

从图29中可以看出，某天中午从哈佛开出的一艘轮船(图29中用实线表示)会与从纽约开出的15艘轮船相遇(图29中虚线表示)。而且在这相遇的15艘船中，有1艘是在出发时遇到(从纽约刚到达哈佛)，1艘是到达纽约时遇到(刚好从纽约开出)，剩下13艘则在海上相遇；另外，还可以从图29中看到，轮船相遇的时间是每天中午和子夜。如果不仔细思考，可能认为共遇到7艘轮船，这是错误的，主要是因为只考虑了以后开出的轮船而忽略了已在海上的轮船。

本讲巩固

1．方法一：全程的平均速度是每分钟(80+70)÷2=75(米)，走完全程的时间是6000÷75=80（分），走前一半路程速度一定是80米/分，时间是3000÷80=37.5（分），则走后一半路程所用时间是80−37.5=42.5（分）。

方法二：设一半时间是x分钟，则$80x+70x=6\times1000$，解得$x=40$，因为80×40=3200（米），大于一半路程3000米，所以走前一半路程速度是80米/分，时间是3000÷80=37.5（分），走后一半路程所用时间是40+(40−37.5)=42.5（分）。

2．第一种情况中相遇时乙走了2400米，根据时间一定，速度比等于路程之比，最初甲、乙的速度比为(6000−2400)∶2400=3∶2，所以第一情况中相遇时甲走了全程的$\frac{3}{3+2}=\frac{3}{5}$。

乙的速度提高到原来的2.5倍后，两人速度比为3∶(2×2.5)=3∶5，根据时间一定，路程比等于速度之比，所以在第二种情况中两人相遇时甲走了全程的$\frac{3}{3+5}=\frac{3}{8}$。

两种情况相比，甲的速度没有变化，只是第二种情况比第一种情况少走9分钟，所以甲的速度为$6000\times\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{8}\right)\div9=150$（米/分）。

3．方法一：出发时，两车的速度之比为5∶4，所以

相遇后两辆车的速度之比为$\frac{5\times(1-20\%)}{4\times(1+20\%)}=\frac{5}{6}$，而相遇前甲、乙两车所行的路程之比为5∶4=25∶20，相遇后两辆车的路程之比为5∶6=20∶24，（因为相遇前甲走AC=5份，乙走BC=4份，相遇后即甲走BC=5份，所以BC=[4, 5]=20），乙还差25−24=1（份）到A地，因此A, B两地相距10÷(25−24)×(25+20)=450（千米）。

方法二：出发时，两车的速度之比为5∶4，所以相遇后两辆车的速度之比为$\frac{5\times(1-20\%)}{4\times(1+20\%)}=\frac{5}{6}$，而相遇前甲、乙两车的行程路程之比为5∶4，所以相遇后两辆车还需要行驶的路程之比为4∶5，所以甲还需要行驶全部路程的$\frac{4}{9}$，当甲行驶这段路程的同时，乙行驶了全程的$\frac{4}{9}\div5\times6=\frac{8}{15}$，距离$A$地还有$1-\frac{4}{9}-\frac{8}{15}=\frac{1}{45}$，所以$A$, B两地相距$10\div\frac{1}{45}$=450（千米）。

4．第一种情况中相遇时乙走了2400米，根据时间一定，速度比等于路程之比，最初甲、乙的速度比为(7200−2400)∶2400=2∶1，所以第一情况中相遇时甲走了全程的$\frac{2}{3}$。乙的速度提高3倍后，两人速度比为2∶3，根据时间一定，路程比等于速度之比，所以第二种情况中相遇时甲走了全程的$\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}$。

两种情况相比，甲的速度没有变化，只是第二种情况比第一种情况少走10分钟，所以甲的速度为$7200\times\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)\div10$=192（米/分）。

5．因为相遇前后甲、乙的速度和没有改变，如果相遇后两人合跑一圈用24秒，则相遇前两人合跑一圈也用24秒。以甲为研究对象，甲以原速V跑了24秒的路程与甲以(V+2)跑了24秒的路程之和等于400米，$24V+24(V+2)=400$，易得$V=7\frac{1}{3}$（米/秒）。

第12讲　进位制进阶

12.1　进制转换和进制判断

例1

（1）由于所求数的位数比较多，我们先从低位写起：

$(1110101)_2=1\times1+0\times2+1\times4+0\times8+1\times16+1\times32+1\times64$

$=1+4+16+32+64$

$=(117)_{10}$

（2）$(463)_8=4\times8^2+6\times8+3$

$=4\times64+6\times8+3$

$=256+48+3$

$=(307)_{10}$

$(2BA)_{12}=2\times12^2+11\times12+10$

$=288+132+10$

$=(430)_{10}$

$(5FC)_{16}=5\times16^2+15\times16+12$

$=1280+240+12$

$=(1532)_{10}$

例2

（1）要将$(42)_{10}$写成二进制数，如图30所示，根据除2倒取余数法，即$(42)_{10}=(101010)_2$。

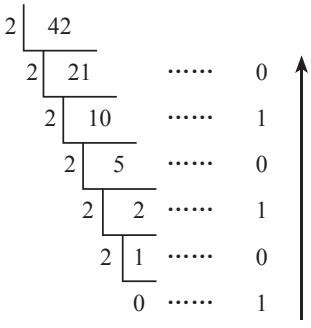


图30

（2）如图31所示，分别列出连除式。

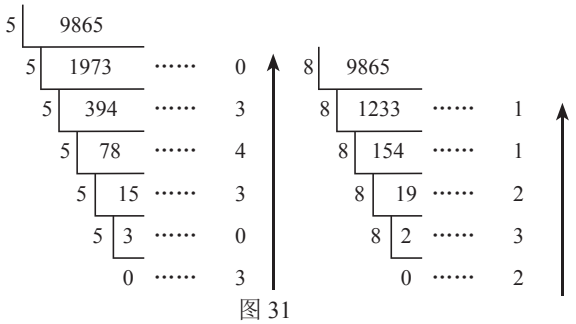


图31

则$(9865)_{10}=(303430)_5$，$(9865)_{10}=(23211)_8$。

例3

(1) 列竖式：

$$\begin{array}{r} 101101 \\ +\quad 10111 \\ \hline 1000100 \end{array}$$

得 $(101101)_2+(10111)_2=(1000100)_2$

(2) 列竖式：

$$\begin{array}{r} 101101 \\ -\quad 10111 \\ \hline 10110 \end{array}$$

得 $(101101)_2-(10111)_2=(10110)_2$

(3) 列竖式：

$$\begin{array}{r} 101101 \\ \times\quad 1011 \\ \hline 101101 \\ 101101 \\ 101101 \\ \hline 111101111 \end{array}$$

得 $(101101)_2\times(1011)_2=(111101111)_2$

(4) 列竖式：

$$\begin{array}{r} 1001 \\ 10011\overline{)\ 10101011} \\ 10011 \\ \hline 10011 \\ 10011 \\ \hline 0 \end{array}$$

得 $(10101011)_2\div(10011)_2=(1001)_2$

12.2 进制的判断

例4

答案见分析

练习1

观察尾数4×3=12，得数尾数为0，即12全部进位，因此这个进制应是12的因数。又因为出现了数字5，因此是六或十二进制,验算可知六进制下等式成立。

12.3 构造进位制解决实际问题

例5

答案见分析。

开放试题

这个数列的每一项都是自然数，并且每个自然数都可以表示成若干个互不相等的3的次方之和，这启发我们去考虑把自然数表示成三进制时的情况.

根据条件，其数列中的每一项在三进制表达式中只会出现0和1，所以可以在全体自然数与数列项之间建立一一对应关系，使自然数的二进制表示与它所对应的数列中的三进制表示相同：

$1=1_{(3)}\longleftrightarrow 1_{(2)}=1$;

$3=10_{(3)}\longleftrightarrow 10_{(2)}=2$;

$4=11_{(3)}\longleftrightarrow 11_{(2)}=3$;

……

在这个对应关系中，第k个自然数正好对应数列中的第k项。

所以，为了求出已知数列的第100项，只需在二进制中找到十进制100的对应数，再进而求出这个对应数在三进制中的对应数即可。即

$100=1100100_{(2)}\longleftrightarrow 1100100_{(3)}=981$，因此，这个数列的第100项是981。

本讲巩固

1. 由于所给出的数位数比较多，我们先从低位写起：

$(11101)_2=1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$

$=16+8+4+1$

$=29$

2．列连除式如图32所示：

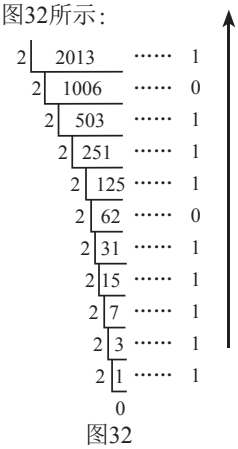


图32

则$(2013)_{10}=(11111011101)_2$。

3．原式=1234−(456+322)=1234−1000=234；

原式=14438+(3123+5766)−(7120+11770)

=14438+10000−20000=4438。

4．利用尾数分析来解决这个问题：

由于$(4)_{10}\times(3)_{10}=(12)_{10}$，而式中为100，尾数为

0，也就是说已经将12全部进到上一位。

所以说进制n为12的约数，也就是12, 6, 4, 3, 2中的一个。

但是式子中出现了4，所以n要比4大，不可能是4, 3, 2进制。

另外，由于$(4)_{10}\times(13)_{10}=(52)_{10}$，因为52＜100，也就是说不到10就已经进位，才能是100，于是知道n＜10，那么n不能是12。

所以，n只能是6。

5．由于$1=(1)_2$, $2=(10)_2$, $4=(100)_2$, $8=(1000)_2$, $16=(10000)_2$, $32=(100000)_2$, ……观察一下就会发现最佳员工所取的数字与二进制中的$(1)_2$, $(10)_2$, $(100)_2$, $(1000)_2$, $(10000)_2$, $(100000)_2$, ……对应，而我们所要的3, 5, 6, 7, 9, ……等数字都可以用这些二进制相加得来，可以通过列竖式演算，说明取1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256的道理。

第13讲　应用题综合

13.1　牛吃草综合

例1

（1）$\begin{cases}x+200y=100\times200,\\x+100y=150\times100,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=10000,\\y=50,\end{cases}$

（2）$10000\div(250-50)=50$（天）

（3）羊的只数等于生长速度，因此为50只。

练习1

方法一：设1头牛1天吃1份草，则1公顷草的生长速度为$(28\times45\div15-10\times30\div5)\div(45-30)=1.6$，1公顷草地的原有草量为$28\times45\div15-1.6\times45=12$，第三块草地可供$(12\times24+1.6\times24\times80)\div80=42$（头）牛吃80天。

方法二：设1头牛1天吃1份草，1公顷草地的原有草量为x，1公顷草地的生长速度为y。

根据题意列方程组得$\begin{cases}5x+5y\times30=10\times30,\\15x+15y\times45=45\times28,\end{cases}$

化简得$\begin{cases}x+30y=60,\\x+45y=84,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=12,\\y=1.6,\end{cases}$

第三块草地可以供$(12\times24+1.6\times24\times80)\div80=42$（头）牛吃80天。

13.2　经济问题综合

例2

解：设成本为a，降价4%，价格减少了4元。

团体负责人会多买$3\times4=12$（件）。

$[100\times(1-4\%)-a]\times(60+12)=(100-a)\times60$

$a=76$

答：这种商品的成本是76元。

例3

（1）$3\times8=24$（元），10月份应交水费24元。

（2）解：设11月份小丽家用水x吨。

$3\times10+(x-10)\times3.5=35.25$

$30+(x-10)\times3.5=35.25$

$x=(35.25-30)\div3.5+10$

$x=11.5$

答：11月份小丽家用水11.5吨。

练习2

解：设王红家上月用水x立方米。

$2\times0.5+(x-2)\times2=13$

$x=8$

答：王红家上月用水8立方米。

13.3　浓度问题综合

例4

方法一：方程法。设B种酒精的浓度为x，则A种酒精的浓度为$2x$，于是可以得到

$100\times2x+400x+1000\times15\%=(1000+100+400)\times14\%$

$600x+150=210$

$x=0.1$

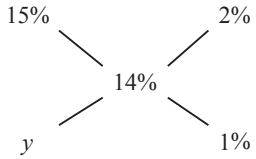
故A的浓度为$2x=2\times0.1=0.2=20\%$。

方法二：比例法。$1000\times15\%=150$（克），混合后溶液中纯酒精为$(1000+400+100)\times14\%=210$（克），$210-150=60$（克），$A$和$B$共含酒精60克，已知$A$和$B$的重量比为1∶4，浓度比为2∶1，那么含酒精的量比1∶2，那么A中含酒精$60\div3=20$（克），则A的浓度为20%。

方法三：十字交叉法。设A种酒精溶液的浓度为x，则B种为$\frac{x}{2}$。

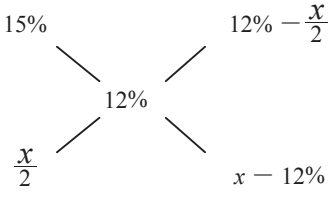
根据题意，假设先把100克A种酒精和400克B种酒精混合，得到500克的酒精溶液，再与

1000 克 15％的酒精溶液混合，两种溶液重量比=1000∶500=2∶1。



所以 A、B 两种酒精混合得到的酒精溶液的浓度为 y=14%−2%=12%。

根据十字交叉法，



有 $(x-12\%):\left(12\%-\frac{x}{2}\right)=400:100$，解得 x=20%。

故 A 种酒精溶液的浓度是 20％。

13.4 工程问题综合

例5

方法一：方程法。设进水速度为 x，出水速度为 y，立方体水箱的容积为 1。则

$$\begin{cases}\frac{2}{3}\div x+\frac{1}{3}\div(x-y)=20,\\ \frac{1}{3}\div x+\frac{2}{3}\div(x-y)=22,\end{cases}$$

解此类方程，可采用换元法。设 $\frac{1}{x}=a,\frac{1}{x-y}=b$，原式可以变形为

$$\begin{cases}\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b=20,\\ \frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b=22,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=18,\\ b=24.\end{cases}$$

所以 $x=\frac{1}{18},y=\frac{1}{18}-\frac{1}{24}=\frac{1}{72}$。

所以，打开两个排水孔注满水箱的时间为

$$\frac{1}{3}\times 18+\frac{1}{3}\times 24+\frac{1}{3}\div\left(\frac{1}{18}-2\times\frac{1}{72}\right)=26\text{（分）。}$$

方法二：设单开进水管注满水箱的 $\frac{1}{3}$ 所需进水时间为 x 分钟，同时开一个进水管与一个出水孔注满水箱的 $\frac{1}{3}$ 所需的进水时间为 y 分钟。则

$$\begin{cases}2x+y=20,\\ x+2y=22,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=6,\\ y=8.\end{cases}$$

将水箱的 $\frac{1}{3}$ 看作“1”，则进水速度为 $\frac{1}{6}$，出水速度为 $\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$，

所以灌满水箱最上层的 $\frac{1}{3}$ 需要 $1\div\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{24}\times 2\right)$=12（分）。

那么总共需要 6+8+12=26（分）。

方法三：图示法。

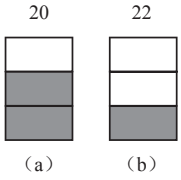


图 33

如图 33 所示，阴影部分表示单开进水管，空白部分表示同时开进水管与一个出水管，比较图 33 中的 (a)、(b)，可以看出图 33(a) 和图 33(b) 中上、下两格的时间完全相同。

则说明单开进水管注满一格的时间比同时开两管注满一格的时间少了 22−20=2（分）。

所以，假设图 33(a) 三格全黑——单开进水管注满水箱，时间为 20−2=18（分钟），即进水管的进水速度为 $\frac{1}{18}$；再假设图 33(b) 三格全白——同时开进水管与一个出水管注满水箱，时间为 22+2=24（分），则其进水速度为 $\frac{1}{24}$，则一个出水管的出水速度为 $\frac{1}{18}-\frac{1}{24}=\frac{1}{72}$。

所以，同时打开两排水管的进水时间为

$$\frac{1}{3}\times 18+\frac{1}{3}\times 24+\frac{1}{3}\div\left(\frac{1}{18}-2\times\frac{1}{72}\right)=26\text{（分）。}$$

开放试题

仔细分析题目，发现本题其实是一个简单的浓度问题：有20%的狗认为自己是猫，有80%的猫认为自己是猫；而将猫和狗混合在一起，所有的猫和狗中，有32%认为自己是猫。那么根据浓度三角，狗和猫的数量之比为(80%−32%)∶(32%−20%)=4∶1。而狗比猫多180只，所以狗的数目是180÷(4−1)×4=240（只）。

本讲巩固

1．方法一：（1）设1头牛1天吃1份草，则草的生长速度为(21×8−24×6)÷(8−6)=12（头），因此最多放养12头牛。

（2）原有草量为24×6−12×6=72，如果放养36头牛最多吃72÷(36−12)=3（天）。

方法二：设1头牛1天吃1份草，设草的生长速度是 x，原有草量为 y，则有

$\begin{cases}6x+y=24\times6,\\8x+y=21\times8,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=12,\\y=72,\end{cases}$因此最多放养12头牛。如果放养36头牛最多吃72÷(36−12)=3（天）。

2．设成本为a，降价5%，价格减少了5元。团体负责人会多买5×4=20(枚)。[100×(1−5%)−a]×(80+20)=(100−a)×80+100，解得a=70，因此这种纪念章的成本是70元。

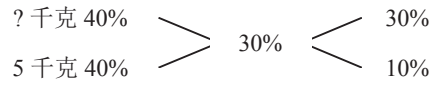
3．设张家和李家7月用水量分别为2x吨和3x吨，那么由已知条件可得

$$\frac{2x-5}{3x-5}=\frac{14.60-5\times0.85}{22.65-5\times0.85},$$

解得x=7。

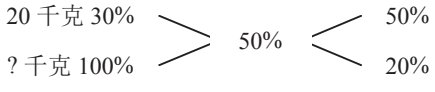
故超出5吨部分的收费标准是每吨(14.60−5×0.85)÷(14−5)=1.15（元）。

4．（1）先求原有40%酒精的质量，



故原有40%酒精5×$\frac{3}{1}$=15（千克），加水后变为30%酒精15+5=20（千克）。

再用十字交叉法：



故再加纯酒精20×$\frac{2}{5}$=8（千克）。

（2）设C瓶盐水有x克，则B瓶盐水为（x+30）克，A瓶盐水为100−(x+x+30)=(70−2x)克。则

$$(70-2x)\times20\%+(x+30)\times18\%+x\times16\%=100\times18.8\%$$

$$x=10$$

所以A瓶盐水为70−2×10=50（克）。

5．根据题意可知，要注$\frac{1}{3}$水箱的水，开一个出水孔比不开出水孔要多用40−35=5（分），那么不开出水孔时注满水箱需35−5=30（分），如果一直开一个出水孔需要40+5=45（分）。说明每分钟注水量为$\frac{1}{30}$，一个孔每分钟排水量为$\frac{1}{30}-\frac{1}{45}=\frac{1}{90}$。

如果两个孔都打开，需要30×$\frac{1}{3}$+45×$\frac{1}{3}$+$\frac{1}{3}$÷$\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{90}\times2\right)$=55（分）。

第14讲　抽屉原理进阶

14.1　基本抽屉原理和最不利原则

例1

（1）求“抽屉里的苹果”数，21÷20=1……1，1+1=2（个）；

（2）求“苹果”数，设苹果数为x，且保证x最少，则余数为1，x÷20=2……1，x=2×20+1=41（个）；

（3）求“抽屉”数，设抽屉数为x，100=3x+a，保证x最多，则a最小为1，此时恰好整除，x=99÷3=33(个)。

例2

将一年中的366天或365天视为366个或365个抽屉，400个人看作400个苹果，从最极端的情况考虑，即每个抽屉都放1个苹果，还有35个或34个苹果必然要放到有1个苹果的抽屉里，所以至少有1个抽屉有至少2个苹果，即至少有2人的生日相同。

练习1

数学小组共有20名同学，因此每个同学最多有19个朋友；又由于他们都有朋友，所以每个同学至少有1个朋友。因此，这20名同学中，每个同学的朋友数只有19种可能：1，2，3，…，19。把这20名同学看作20个“苹果”，把同学们拥有的朋友数目看作19个“抽屉”，根据抽屉原理，至少有2名同学，他们的朋友人数一样多。

练习2

两个球的颜色只有15种可能：其中同色有5种，异色有$C_5^2=10$（种）。由抽屉原理可知，参加取球的至少有15+1=16（人）。

14.2　构造抽屉解决数论问题

例3

（1）构造和为41的抽屉：(1, 40), (4, 37), (7, 34), (10，31), (13, 28), (16, 25), (19, 22)，现在任取8个数，一定有两个数取在同一个抽屉，所以至少有2个数的和是41。

（2）方法一：按照除以4的余数，把这些数分成4组：{1, 5, 9, 13, 17, 21}；{2, 6, 10, 14, 18}；{3, 7, 11, 15, 19}；{4, 8, 12, 16, 20}。

显然，在每组中相邻两数的差总是4，若要差不等于4，至多能取出3+3+3+3=12（个）数；可见，若任取13个数，总存在两个数差为4。

方法二：使任两数之差不等于4，则每8个数取前4个，21÷8=2……5，只能取2×4+4=12（个）数。若要保证两个数的差等于4，则至少需要取13个数。

练习3

构造公差为 5 的数列，按除以 5 的余数可分成 5 个抽屉，每个抽屉最多可以取 4 个数，最多一共可以取 20 个。

{1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36}
{2, 7, 12, 17, 22, 27, 32}
{3, 8, 13, 18, 23, 28, 33}
{4, 9, 14, 19, 24, 29, 34}
{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35}。

例4

答案见分析。

14.3 构造抽屉解决其他问题

例5

（1）用红、蓝两种颜色给每列中两个小方格随意涂色，只有图 34 中所示的四种情形：



图 34

将上面的四种情形看成四个“抽屉”，把五列方格看成五个“苹果”，根据抽屉原理，将五个苹果放入四个抽屉，至少有一个抽屉中有不少于两个苹果，也就是至少有一种情形占据两列方格，即这两列的小方格中涂的颜色完全相同。

（2）所有不同的涂色方式只有 $A_3^3=6$（种），而图中一共有 9 列，所以必有两列的涂色方式是相同的。

练习4

在8×8的方格纸中，一共有2×2的田字格7×7=49（个）。在1～4中任取四个数（可重复）的和可以是4～16，共13种可能。49÷13=3……10，根据抽屉原理，至少有3+1=4（个）田字格内的数字之和是相同的。

开放试题

如果把六个人当做六个点，每两点之间都有连线，用红色的线段表示两人认识，蓝色的线段表示两人不认识，那么原题可以换一种表述方法：一个平面上有六个点，任意三点不共线，每两点用红色或蓝色的线段连起来，证明至少存在一个同色的三角形。

从这六个点中随意选取一点A，从A点引出的五条线段，根据抽屉原理，必有三条的颜色相同，不妨设有三条线段为红色，它们另外一个端点分别为B, C, D，那么这三点中只要有两点（比如说B, C之间的线段）是红色，则A, B, C三点组成红色三角形；如果B, C, D三点之间的线段都不是红色，即都是蓝色，这样B, C, D三点组成蓝色三角形，也符合条件。所以结论成立。

本讲巩固

1.（1）若四种颜色的小旗仅取一面，有4种不同信号；

若四种颜色的小旗取其中两面，有4×3=12（种）不同信号；

若四种颜色的小旗取其中三面，有4×3×2=24（种）不同信号；

若四种颜色的小旗取其中四面，有4×3×2×1=24（种）不同信号。

则共有不同信号4+12+24+24=64（种）。

（2）323÷64=5……3。根据抽屉原理，这一天某种信号必定至少出现6次。

2.（1）我们把题目中的15个偶数制造8个抽屉，{2}, {4，30}, {6，28}, …, {16，18}, 凡是抽屉中有2个数的，都具有一个共同的特点：这2个数的和是34。现从题目中的15个偶数中任取9个数，根据抽屉原理（因为抽屉只有8个），必有2个数在同一个抽屉中。由抽屉的特点，这2个数的和是34。

（2）将100个数分成50组：{1, 51}, {2, 52}, {3, 53}, …, {50, 100}，将其看作50个抽屉，在选出的51个数中，必有2个属于一组，这一组的差为50。

3. 把自然数按照除以5的余数分成5个剩余类，即5个抽屉。任取六个自然数，根据抽屉原理，至少有两个数属于同一剩余类，即这两个数除以5的余数相同，因此它们的差是5的倍数。

4. 根据上一题的提示，我们可以写出下列数字谜 $(a\square b)\ (c\square d)\ (e\square f)$ 使其结果为105的倍数，那么我们的思路是使第一个括号里是7的倍数，第二个括号里是5的倍数，第三个括号里是3的倍数。如果六个数字里有7的倍数，那么第一个括号里直接做乘法即可；如果没有7的倍数，那么我们有如下抽屉：

{除以7的余数是1或者是6}
{除以7的余数是2或者是5}
{除以7的余数是3或者是4}

那么六个数字中肯定有两个数字在同一个抽屉里，这两个数如果余数相同，做减法就可以得到7的倍数，如果余数不同，做加法就可以得到7的倍数。这样在剩下的四个数中，同理可得后面的括号里也可以组合出5和3的倍数。于是本题可以证明。

5. 每个2×2正方格内的四个数字的和最大是6+6+6+6=24，最小是1+1+1+1=4，从4至24共有24−4+1=21（个）不同的数值，但是在6×6的方格表中，共有25个不同的2×2的正方格，也就是有25个“标示数”，25＞21，根据抽屉原理，必有两个“标示数”相同。